

MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK

PERIODICAL
UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

NEUE FOLGE

DER MONATSHEFTE FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK

UNTER MITWIRKUNG DER
ÖSTERREICHISCHEN MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

J. RADON

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

N. HOFREITER

WIEN

55. BAND, 3. HEFT

MIT 6 TEXTABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM JULI 1951)



WIEN
SPRINGER-VERLAG

1951

Mh. Math.

Monatshefte für Mathematik

Neue Folge der Monatshefte für Mathematik und Physik

erscheinen zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20–25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für die Monatshefte für Mathematik bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung der Monatshefte für Mathematik, Mathematisches Institut der Universität
Wien IX., Strudlhofgasse 4,
zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

55. Band/3. Heft

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Ellis, D. Notes on Abstract Distance Geometry. II. Implications of basality in generalized semimetric spaces	185
Pinl, M. Über einen Satz von L. Berwald und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen	188
Rédei, L. und J. Szép. Über die endlichen nilpotenten Gruppen	200
Müller, H. R. Über geschlossene Bewegungsvorgänge	206
Wrtilek, F. Tangenten- und Krümmungskreis Konstruktionen an ebenen Kurven mittels Deutung eines Kurvenparameters	215
Dénes, P. Über eine rekurrente Serie von relativ-zyklischen algebraischen Zahlkörpern	229
Schmid, J. Ein idealtheoretischer Beweis des Kriteriums von Plücker-Clebsch	233
Hohenberg, F. Die isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden und Trochoiden	242
Buchbesprechungen	250

Notes on Abstract Distance Geometry*.

II. Implications of basality in generalized semimetric spaces.

By

David Ellis, Gainesville, USA.

(Received November 6, 1950.)

1. *Introduction.* This note is one of a series of papers developing geometry in abstract distance spaces. The terminology employed is that of our foundational paper¹ on this topic. For the sake of completeness, however, we include the terms used in the present paper in our definitions below.

Let S and G be abstract sets and $d(x, y)$ be a single-valued mapping of SS into G . We say that S is a *distance space over G* and that G is the *ground set* of S . If $d(x, y)$ is a symmetric function in its two variables then S is said to be *symmetric*. If $d(x, x) = d(y, y) \neq d(x, y)$ for each pair x, y of distinct elements of S then the common value of $d(x, x)$ is denoted by 0 and S is said to have the *vanishing condition* (or, more precisely, to satisfy the vanishing condition). A distance space S over G which satisfies the conditions of symmetry and vanishing is called a *generalized semimetric space over G* since these are precisely the conditions for a semimetric space when G is the set of non-negative real numbers. S is called *basal* if each point of S forms a complete metric base for S ; that is, given a point p of S and an element d of G there is exactly one element q of S with $d(p, q) = d$. An example of such a basal generalized semimetric space is the writer's autometrized Boolean algebra².

* Presented to the American Mathematical Society; February 23, 1951.

¹ David Ellis, *Geometry in abstract distance spaces*, Publicationes Mathematicae (Debrecen), vol. 2 (1951), Issue 1.

² David Ellis, *Autometrized Boolean algebras*. I, To appear in Canadian Jour. of Math.

In all that follows throughout the note, S denotes a basal generalized semimetric space over G . Two subsets of S , A and B , are called *congruent*, written $A \approx B$, if there is a single-valued mapping of one onto the other which preserves distance. It is easily seen that the congruence relation is an equivalence relation in the subsets of S (by distance we mean, of course, the values of $d(x, y)$). A congruence of S with itself is called a *motion* of S and the group of all such congruences is called the group of motions of S . The group of motions of S is called *simply transitive* (or S is called metrically homogeneous) if given any two points x, y of S there is a motion of S sending x into y . S is said to have the property of *free mobility* provided that if A and B are subsets of S with $A \approx B$ then there is a motion of S which agrees with the congruence mapping of A onto B . We indicate the mapping which establishes congruence between A and B by $A \approx_f B$. Then we may restate the definition of free mobility to read, S has the property of free mobility provided $A \approx_f B$ for two subsets A, B of S implies the existence of a motion of S which agrees with f over A . The property of free mobility is a highly critical and important one for the metric spaces of classical distance geometry and may be expected to be also very important in abstract distance geometry.

S is *metrically irreducible* (sometimes called monomorphic after Lindenbaum) provided S is not congruent with a proper subset of itself.

The *distance set* of S is the subset $D(S)$ of G consisting of all d in G for which there exist x, y in S with $d(x, y) = d$.

S is *distancially irreducible* provided there is no proper subset S^* of S with $D(S) = D(S^*)$.

S is *irreducible over the ground set* provided $D(S) = G$.

2. The free mobility of a basal generalized semimetric space.

Theorem 1.

The group of motions of S is simply transitive.

Proof. For $x, y \in S$ define the mapping $f(z)$ over S in the following way: $f(x) = y$, $f(z)$ is the unique element of S for which $d(f(z), y) = d(z, x)$. We refer to this mapping as the distance mapping sending x into y . Now if $a, b \in S$ it is easily seen by considering the distance mapping sending a into $f(a)$ ($f(a)$ being the image of a under the distance mapping sending x into y) that this mapping sends x into y and b into $f(b)$ so that $d(a, b) = d(f(a), f(b))$ and f is a congruence.

Theorem 2.

S has the property of free mobility.

Proof. Let $A \approx_f B$ and select $x \in A$. Then it is easily verified that the distance mapping (motion of S) sending x into $f(x)$ agrees with f over A .

3. Irreducibilities of a basal generalized semimetric space.

Theorem 3.

S is metrically irreducible.

Proof. Suppose S^* is a proper subset of S with $S \approx_f S^*$. Let x be an element of S not in S^* . Now, $f(x)$ is in S^* but x is the only point of S with distance $d(x, f(x))$ from $f(x)$. Hence $d(x, f(x)) \neq d(f(x), f(f(x)))$ and f is not a congruence.

Theorem 4.

S is distancially irreducible.

Proof. Suppose S^* is a proper subset of S with $D(S) = D(S^*)$. Select a S^* . For any x in S , x is the only element of S with distance $d(a, x)$ from a . Hence, if $x \in S^*$ then there is no point of S^* with distance $d(a, x)$ from a . However, a was selected arbitrarily, so that no distance of any point from x is taken on in S^* and, since x is a complete metric base for S , $D(S^*) = 0$ (null set). Thus, a contradiction proves the theorem. (We have tacitly assumed that S is non-null since this trivial case is of no interest.)

Theorem 5.

S is irreducible over the ground set.

Proof. Theorem 5 is an immediate consequence of the definition of basality.

The University of Florida.

Über einen Satz von L. Berwald und die Gaußsche Krümmung der Minimalflächen.

Von

M. Pinl, Dacca (Pakistan).

(Eingelangt am 11. November 1950.)

Im folgenden bezeichnen $x_1, x_2, \dots, x_n$ kartesische Punktkoordinaten eines komplexen euklidischen n -dimensionalen Raumes R_n und kleine gotische Buchstaben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{e}, \mathfrak{h}$, Vektoren in R_n . Zwei komplexe Parameter u_1, u_2 heißen isotrope Parameter der Fläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$, wenn die Komponenten $g_{\alpha\beta}(u_1, u_2)$, $\alpha, \beta = 1, 2$ des metrischen Fundamentaltensors der Fläche in ihnen die Form

$$g_{11} = g_{22} = 0, \quad g_{12} = g_{21} \neq 0, \quad (g_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta, \quad \mathfrak{x}_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, 2)$$

annehmen. In isotropen Flächenparametern wird also stets $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$ vorausgesetzt, wodurch die halisotropen Flächen¹ mit $|g_{\alpha\beta}| = 0$ und die vollisotropen Flächen² mit $g_{\alpha\beta} = 0$ ausgeschlossen werden. Diese Beschränkung ist jedoch von vornherein notwendig, wenn man den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ und die Gaußsche Krümmung K in den Kreis der Betrachtungen ziehen will, die beide nur für $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ definiert sind.

§ 1. Studysche Parameter, ein Satz von L. Berwald.

Bereits die Verwendung allgemeiner isotroper Flächenparameter bringt für die Formeln der Flächentheorie erhebliche Vereinfachungen. So erhalten wir für die Christoffelklammern $\{\mu_{\alpha\beta}\}$ mit Hilfe der kontravarianten Komponenten $g^{\alpha\beta}$ des Fundamentaltensors

¹ Zur Terminologie vgl. z. B. R. Weitzenböck, Invariantentheorie, S. 300, P. Noordhoff, Groningen, 1923.

² Zur Terminologie vgl. J. Lense, Über isotrope Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 116 (1939), 297—309; Beiträge zur Theorie der isotropen Mannigfaltigkeiten. Monatshefte Math. u. Phys. 48 (1939), 121—128.

$$g^{11} = g^{22} = 0, \quad g^{12} = \frac{1}{g_{12}}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} = 0 \quad (1)$$

und daher für den Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ und mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der Fläche die einfachen Ausdrücke

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \mathfrak{x}_{\mu}, \quad \mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2 g^{12} \mathfrak{x}_{12} = \frac{2 \mathfrak{x}_{12}}{g_{12}},$$

$$(\mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u_{\alpha} \partial u_{\beta}}, \quad \alpha, \beta = 1, 2). \quad (2)$$

Auch die *Gaußsche* Krümmung vereinfacht sich wesentlich:

$$d s^2 = 2 g_{12} d u_1 d u_2, \quad K = - \frac{1}{g_{12}} \frac{\partial^2 \lg g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} =$$

$$= - \frac{1}{g_{12}^3} \left(g_{12} \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} \right). \quad (3)$$

Eine weitere Vereinfachung läßt sich in vielen Fällen durch die Einführung der natürlichen zuerst von *E. Vessiot* und *E. Study* eingeführten Parameter³ der isotropen Kurven als Flächenparameter erzielen. Diese existieren auf allen beschränkt isotropen Kurven $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(t)$ und sind durch die ordnungsniedrigste nicht identisch verschwindende der Integralinvarianten

$$p_k(t) = \int_{t_0}^t \sqrt[2k]{-\left(\frac{d^{(k)} \mathfrak{x}}{d \tau^k}\right)^2} d \tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

gegeben. Für die einfach isotropen Kurven, welche wir im folgenden vorzugsweise betrachten, ergibt sich der von *E. Vessiot* und *E. Study* betrachtete Fall $k = 2$ natürlicher Parameter

$$p_2(t) = \int_{t_0}^t \sqrt[4]{-\ddot{\mathfrak{x}}^2} d \tau \quad (5)$$

Bei der Verwendung der *Study-Vessiot'schen* Parameter als Flächenparameter haben wir also insbesondere diejenigen Flächen auszuschließen, deren eine oder beide Scharen isotroper Kurven aus isotropen

³ Vgl. *E. Vessiot*, Comptes Rendus, Bd. 140, S. 1381—1384. 1905; *E. Study*, Zur Differentialgeometrie der analytischen Kurven. Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 10, S. 1—49, 1909.

Geraden bestehen⁴. Im Falle der Flächentheorie im dreidimensionalen euklidischen Raum R_3 ist aber noch eine weitere Einschränkung zu beachten, wie *L. Berwald* gefunden hat:⁵

I. *Auf einer Fläche des R_3 mit zwei Scharen nichtlinearer isotroper Kurven lassen sich deren natürliche Kurvenparameter nur dann als Flächenparameter einführen, wenn die Fläche feste mittlere Krümmung hat.*

Einen Beweis dieses Satzes scheint *L. Berwald* nicht veröffentlicht zu haben. Wir führen einen solchen, gestützt auf einen mündlichen Hinweis, welchen Verfasser *L. Berwald* verdankt. Wir denken uns die Fläche $\mathfrak{z}$ des R_3 auf *Study-Vessiot'sche* Parameter als Flächenparameter bezogen und untersuchen die Konsequenzen dieser Annahme. Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1^2 = \mathfrak{z}_2^2 = 0, \quad \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \neq 0, \quad \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_{11} = \mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_{12} = \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_{12} = \mathfrak{z}_2 \mathfrak{z}_{22} = 0, \\ \mathfrak{z}_{11}^2 = -1, \quad \mathfrak{z}_{22}^2 = -1. \end{aligned} \quad (6)$$

Die mittleren dieser Gleichungen ergeben sich durch Differentiation aus den ersten beiden, die letzten dieser Gleichungen sind die Normierungsgleichungen in *Study-Vessiot'schen* Parametern. Mit Hilfe von (6) erhalten wir für die Quadrate der Komponenten $h_{\alpha\beta}$ der zweiten metrischen Fundamentalform der Fläche (wir befinden uns in einem R_3 !) die Werte

$$h_{\alpha\beta} = \frac{(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_{\alpha\beta})}{\sqrt{g}}, \quad h_{11}^2 = -1, \quad h_{12}^2 = \mathfrak{z}_{12}^2, \quad h_{22}^2 = -1, \quad g = |g_{\alpha\beta}| \quad (7)$$

und daher für die mittlere und die *Gauß'sche* Krümmung H und K der Fläche

$$H = \frac{h_{12}}{g_{12}}, \quad K = \frac{1}{g_{12}^2} + H^2. \quad (8)$$

Für die Komponenten $h_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ bestehen im R_3 die *Codazzi-Mainard'schen* Gleichungen

$$g_{12} \frac{\partial h_{12}}{\partial u_\alpha} - h_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \left(\frac{\partial h_{\alpha\alpha}}{\partial u_\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2 \right).$$

⁴ Vgl. *L. Berwald*, Über die Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden. Sitzungsber. der Königlich Bayrischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1913, S. 143–211.

⁵ Vgl. *W. Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 3. Aufl., S. 234. Berlin, Springer, 1930.

Sie bedeuten mit Rücksicht auf (8) für H und K

$$\frac{\partial H}{\partial u_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial u_\alpha} = -2 g_{12}^{-3} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (9)$$

Damit ist der Satz von *Berwald* bewiesen: die mittlere Krümmung H unserer Fläche ist notwendig konstant. Für den mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ ergibt sich aus (2), (8) und (9)

$$\frac{1}{2} |\mathfrak{h}| = H = \text{const.}$$

d. h. der mittlere Krümmungsvektor ist dem Betrag (aber nicht der Richtung nach) konstant. Die Verwendung *Study-Vessiot*scher Parameter als Flächenparameter bedeutet also im R_3 Beschränkung auf die Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Wie steht es damit für Flächen in euklidischen Räumen höherer Dimension? Zunächst bemerken wir bereits im R_3 , daß die Bedingung $H = \text{const}$ keineswegs hinreichend für die Existenz *Study-Vessiot*scher Flächenparameter ist. So sind doch z. B. die Kugeln des R_3 gewiß Flächen konstanter mittlerer Krümmung H , auf welchen keine *Study-Vessiot*schen Parameter existieren, da alle ihre isotropen Kurven geradlinig sind. Aber für mehrdimensionale Räume verliert die *Berwald*sche Bedingung auch ihren notwendigen Charakter. Vermutlich gilt dies bereits für $n = 4$. Um ein rechnerisch bequemes Beispiel für eine Fläche anzugeben, deren Parameter *Study-Vessiot*sche Parameter sind, deren mittlerer Krümmungsvektor aber gleichwohl weder dem Betrage noch der Richtung nach konstant ist, setzen wir $n = 12$ und betrachten die Fläche $\mathfrak{L}$ des euklidischen R_{12}

$$\mathfrak{L}(u_1, u_2) = \mathfrak{h}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2) + \mathfrak{r}^*(u_1, u_2), \quad \mathfrak{r}^* = \frac{\mathfrak{r}}{r^2}, \quad (10)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \{y_1, y_2, y_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\ \mathfrak{z} &= \{0, 0, z_3, z_4, z_5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\ \mathfrak{r}^* &= \{0, 0, 0, 0, 0, r^*_6, r^*_7, r^*_8, r^*_9, r^*_{10}, r^*_{11}, r^*_{12}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Für $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{z}$ wählen wir jetzt die isotropen Kurven

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \{i \sin u_1, i \cos u_1, u_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \\ \mathfrak{z} &= \{0, 0, u_2, i \sin u_2, i \cos u_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} \end{aligned} \quad (12)$$

und für $\mathfrak{r}$ die totalisotrope Fläche⁶ $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = 0$,

⁶ Vgl. *M. Pinl*, Zur Existenztheorie und Klassifikation der totalisotropen Flächen, S. 220–221, *Compositio Mathematica* 5/2, 207–238 (1937).

$$r_6 = \frac{1}{2} (u_1 + 2i u_1 u_2^2), \quad r_7 = \frac{1}{2i} (u_1 - 2i u_1 u_2^2),$$

$$r_8 = \frac{1}{2} (u_2 + 2i u_1^2 u_2), \quad r_9 = \frac{1}{2i} (u_2 - 2i u_1^2 u_2), \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (13)$$

$$r_{10} = \pm i \sqrt{2} i u_1 u_2, \quad r_{11} = \frac{1}{2i} (u_1^2 + i u_2^2), \quad r_{12} = \pm \frac{i}{2} (u_2^2 + i u_1^2).$$

mit der Komponentenquadratsumme

$$r^2 = r_6^2 + r_7^2 + r_8^2 + r_9^2 + r_{10}^2 + r_{11}^2 + r_{12}^2 = i u_1^2 u_2^2 \neq 0. \quad (14)$$

Für die ersten und zweiten Ableitungen $r_1, r_2, r_{11}, r_{12}, r_{22}$ des Vektors r ergibt sich die Komponentenmatrix

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1+2iu_2^2), & \frac{1}{2i}(1-2iu_2^2), & 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, & \pm i\sqrt{2}iu_2, & -iu_1, & \mp u_1 \\ 2iu_1u_2, & -2u_1u_2, & \frac{1}{2}(1+2iu_1^2), & \frac{1}{2i}(1-2iu_1^2), & \pm i\sqrt{2}iu_1, & u_2, & \pm iu_2 \\ 0, & 0, & 2iu_2, & -2u_2, & 0, & -i, & \mp 1 \\ 2iu_2, & -2u_2, & 2iu_1, & -2u_1, & \pm i\sqrt{2}i, & 0, & 0 \\ 2iu_1, & -2u_1, & 0, & 0, & 0, & 1, & \pm i \end{vmatrix}.$$

Sie ist vom Rang 5, wie man etwa in einer gewissen Umgebung der Parameterwerte $u_1 = u_2 = 0$ feststellt. Ferner verschwinden die Quadratsummen der Elemente sämtlicher Zeilen mit Ausnahme der Quadratsumme der Elemente der vierten Zeile r_{12}^2 identisch in u_1 und u_2 . Ebenso verschwinden die inneren Produkte sämtlicher Zeilenpaare mit Ausnahme des Produktes der dritten und fünften Zeile ($r_{12}^2 = r_{11} r_{22} \neq 0$). Somit erhalten wir für den Vektor r und seine ersten und zweiten Ableitungen die Beziehungen:

$$r^2 \neq 0, \quad r_1^2 = r_1 r_2 = r_2^2 = r_{11}^2 = r_{11} r_{12} = r_{12} r_{22} = r_{22}^2 = 0, \quad r_{12}^2 = r_{11} r_{22} = -2i = \text{const} \quad (16)$$

Da $r^2 \neq \text{const} \neq 0$ bleibt die Fläche r bei der Inversion $r^* = \frac{r}{r^2}$ nicht invariant. Für die Komponenten $g^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = r^*_{\alpha\beta} r^*_{\gamma\delta}$ des *Study*schen Tensors⁷ der totalisotropen Fläche r^* gilt

⁷ Vgl. M. Pinl, Quasimetrik auf totalisotropen Flächen I, Proceedings Amsterdam 35/9, 1181—1188 (1932); II, 36, 550—557 (1933).

$$g^*_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{g_{\alpha\beta\gamma\delta}}{r^2}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \quad (17)$$

wenn wir mit $g_{\alpha\beta\gamma\delta} = r_{\alpha\beta} r_{\gamma\delta}$ den *Study*schen Tensor der Fläche r bezeichnen. Daher bekommen wir für die Fläche $r^* = \frac{r}{r^2}$ die (16) entsprechenden Beziehungen

$$\begin{aligned} r_1^{*2} = r_1^* r_2^* = r_2^{*2} = 0, \quad r_{11}^{*2} = r_{11}^* r_{12}^* = r_{12}^* r_{22}^* = r_{22}^{*2} = 0, \quad r_{12}^{*2} = \\ = r_{11}^* r_{22}^* = \frac{-2}{u_1^2 u_2^2} \end{aligned} \quad (18)$$

und der Betrag des Vektors r_{12}^* ist also nicht mehr konstant. Jetzt betrachten wir die isotropen Kurven (12). Ihre Parameter sind *Study-Vessiot*sche Parameter u_1 und u_2 , denn es gilt

$$\eta'^2 = \dot{z}^2 = 0, \quad \eta''^2 = \ddot{z}^2 = -1. \quad (19)$$

Diese Parameter u_1, u_2 sind aber auch *Study-Vessiot*sche Flächenparameter auf der Fläche (10). Denn aus (10), (11), (19) und (18) folgt:

$$\xi_1 = \eta' + r_1^*, \quad \xi_2 = \dot{z} + r_2^*, \quad \xi_{11} = \eta'' + r_{11}^*, \quad \xi_{22} = \ddot{z} + r_{22}^* \quad (20)$$

$$\xi_1^2 = g_{11}^2 = \xi_2^2 = g_{22}^2 = 0, \quad \xi_1 \xi_2 = g_{12} = \eta' \dot{z} = 1, \quad \xi_{11}^2 = \eta''^2 = -1, \quad \xi_{22}^2 = \ddot{z}^2 = -1.$$

Da die Diskriminante $g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = -1$ der metrischen Fundamentalform der Fläche (10) nicht verschwindet, können wir sowohl ihren mittleren Krümmungsvektor als auch ihre *Gauß*sche Krümmung berechnen und erhalten nach (2), (3), (10) und (20)

$$\mathfrak{h} = \frac{2 \xi_{12}}{g_{12}} = 2 \xi_{12} = 2 r_{12}^*, \quad |\mathfrak{h}| = \frac{2\sqrt{2}}{u_1 u_2}, \quad K = 0. \quad (21)$$

Damit ist gezeigt:

II. Die Fläche (10) ist ein Beispiel einer Fläche des R_{12} mit variablem mittleren Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ von nichtkonstantem Betrag, auf welcher gleichwohl die Einführung der *Study-Vessiot*schen Parameter ihrer isotropen Kurven als Flächenparameter gestattet ist.

§ 2. Minimalflächen in R_n .

Für Minimalflächen ist das Verschwinden des mittleren Krümmungsvektors $\mathfrak{h}$ charakteristisch. Insbesondere für $n = 3$ folgt auf ihnen das Verschwinden der mittleren Krümmung H und damit ist in diesem Falle auch die *Berwald*sche Bedingung erfüllt. Bereits vor Berwald

hatte denn auch *E. Study* die natürlichen Parameter der isotropen Kurven als Flächenparameter auf Minimalflächen eingeführt und bemerkenswerte Vereinfachungen der flächentheoretischen Formeln erzielt⁸. Davon ist für uns die einfache Formel für die *Gaußsche Krümmung* der Minimalflächen von besonderem Interesse. Von den zahlreichen bekannten Eigenschaften der Minimalflächen des R_3 gehen für die Minimalflächen höherdimensionaler Räume viele verloren. Doch die interessante Deutung der Minimalflächen als Schiebflächen isotroper Kurven gilt für beliebige Räume R_n ⁹. Entsprechend verwenden wir den Ansatz:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \quad \mathfrak{y}'^2 = 0, \quad \mathfrak{z}'^2 = 0 \quad (22)$$

für beliebige Minimalflächen des R_n . Für $n=3$ und nichtlineare auf natürliche Parameter bezogene isotrope Kurven erhält man aus (22) und (3) wegen $\mathfrak{y}' \times \mathfrak{y}'' = -\mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot}$, $\mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'' = -\mathfrak{z}'^{\cdot} \mathfrak{y}'^{\cdot}$

$$g_{11} = g_{22} = 0, \quad g_{12} = \mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} = \mathfrak{y}''^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot}, \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} = \mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}''^{\cdot}, \quad \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} = \mathfrak{y}''^{\cdot} \mathfrak{z}''^{\cdot} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{g_{12}^3} [(\mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot})(\mathfrak{y}''^{\cdot} \mathfrak{z}''^{\cdot}) - (\mathfrak{y}''^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot})(\mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}''^{\cdot})] = -\frac{1}{g_{12}^3} [(\mathfrak{y}' \times \mathfrak{y}'')(\mathfrak{z}' \times \mathfrak{z}'')] = \\ &= -\frac{\mathfrak{y}'^{\cdot} \mathfrak{z}'^{\cdot}}{g_{12}^3} = -\frac{1}{g_{12}^2}, \end{aligned}$$

also wiederum den *Study'schen* Ausdruck für die *Gaußsche Krümmung*. Nunmehr betrachten wir unter sonst gleichen Voraussetzungen Minimalflächen des R_4 und berechnen das Determinantenquadrat

$$(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}', \mathfrak{z}'')^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & g_{12}, & \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} \\ 0, & -1, & \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}, & \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} \\ g_{12}, & \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}, & \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2}, & 0, & -1 \end{vmatrix} = g_{12}^2 (g_{12}^4 K^2 - 1).$$

⁸ Vgl. (5), § 108.

⁹ Vgl. *E. Bompiani*, Surfaces de translation, C. R. 169 (1919), 840—843 (für Riemannsche Einbettungsräume).

Diese Berechnung zeigt: für $K = \pm \frac{1}{g_{12}^2}$ verschwindet $(\eta', \eta'', \dot{\xi}, \ddot{\xi})$.

Dann sind diese Vektoren linear abhängig und die Vektoren $\xi_1, \xi_2, \xi_{11}, \xi_{22}$ desgleichen. Die Schmiegeebenen der Schiebkurven η und ξ haben also dauernd einen Vektor gemeinsam und liegen daher in einem R_3 . Desgleichen ist mindestens einer der beiden Vektoren ξ_{11} und ξ_{22} eine lineare Kombination der übrigen und ebenso die Ableitungen $\xi_{111}, \xi_{1111}, \dots$, bzw. $\xi_{222}, \xi_{2222}, \dots$, da alle gemischten Ableitungen verschwinden. Daher liegt die Fläche in einem dreidimensionalen linearen Unterraum des R_4 . Für reelle Flächen ist $g_{12} = \eta' \dot{\xi}$ reell, $g_{12}^2 > 0$ und $K < 0$. Dann ist in Studyschen Parametern $K = -\frac{1}{g_{12}^2}$ und wir erhalten das Resultat:

III. Die Gaußsche Krümmung einer reellen Minimalfläche des R_4 gewinnt durch Verwendung Studyscher Parameter als Flächenparameter nur dann die Form $K = -\frac{1}{g_{12}^2}$, wenn die Minimalfläche in einem dreidimensionalen linearen Unterraum des R_4 liegt.

Die Minimalflächen des R_3 mit $K = \frac{1}{g_{12}^2}$ sind niemals von konstanter Gaußscher Krümmung. Denn wegen $g_{11} = g_{22} = 0$ müßte dann auch g_{12} konstant ausfallen und daher K verschwinden. Die beiden Typen abwickelbarer Minimalflächen des R_3^{10} tragen aber beide geradlinige isotrope Kurven, und zwar die Ebenen, deren zwei Scharen und die Mongeschen Minimalzylinder eine solche Schar. In beiden Fällen existieren keine Studyschen Flächenparameter. Daraus folgt:

IV. Im dreidimensionalen euklidischen Raum R_3 gibt es weder komplexe noch reelle Minimalflächen mit konstanter nichtverschwindender Gaußscher Krümmung.

In höheren euklidischen Räumen sind die Minimalflächen mit verschwindender Gaußscher Krümmung bereits allgemein untersucht und klassifiziert worden¹¹. Schon im R_4 gibt es abwickelbare Minimalflächen, deren isotrope Schiebkurven beider Scharen nicht geradlinig

¹⁰ Vgl. M. Pinl, Zur dualistischen Theorie isotroper Kurven, Monatshefte für Math. u. Phys. 49 (1940), 261–278; Über die komplexen Minimalflächen mit der Gaußschen Krümmung Null, Archiv der Mathematik 2. 4. (1949/50, 283–288).

¹¹ Vgl. (10).

sind¹². Bedeuten a und b die Halbachsen der Krümmungsellipse, so ergibt sich für die *Gaußsche* Krümmung der Minimalflächen des R_n die negative Quadratsumme $-(a^2 + b^2)$. Auf reellen Flächen ist dieser Ausdruck niemals positiv. Wir stellen nun die Frage nach Minimalflächen des R_n für $n \geq 4$ mit konstanter nichtverschwindender *Gaußscher* Krümmung, insbesondere die nach reellen Minimalflächen des R_n ($n \geq 4$) mit konstanter negativer *Gaußscher* Krümmung $K < 0$. Für reelle Flächen sind die Vektoren η und ζ notwendig konjugiert-komplex und die reellen Komponenten $x_1, x_2, \dots, x_n$ des Ortsvektors der reellen Minimalfläche sind durch die Realteile der komplexen Komponenten $y_1, y_2, \dots, y_n$ der isotropen Kurve gegeben. Bezeichnen wir nunmehr den komplexen Parameter der isotropen Kurve η mit $u = u_1 + i u_2$, so gilt

$$\eta(u) = r(u_1, u_2) + i \bar{s}(u_1, u_2)$$

und da η in u analytisch nach *Cauchy-Riemann*

$$r_1 = \bar{s}_2, \quad r_2 = -\bar{s}_1, \quad \Delta r = r_{11} + r_{22} = 0, \quad \Delta \bar{s} = \bar{s}_{11} + \bar{s}_{22} = 0.$$

Da η isotrop, folgt

$$\eta^2 = (r_1 + i \bar{s}_1)^2 = (r_1 - i r_2)^2 = (i \bar{s}_1 + \bar{s}_2)^2 \equiv 0 \{u_1, u_2\},$$

und daher

$$r_1^2 = r_2^2, \quad r_1 r_2 = 0, \quad \Delta r = 0, \quad \text{bzw.} \quad g_{11} = g_{22} = \lambda \neq 0, \quad g_{12} = 0.$$

Real- und Imaginärteil der komplexen Veränderlichen u sind also isotherme Flächenparameter auf der reellen Minimalfläche des R_n . Für das Bogenelement und die *Gaußsche* Krümmung ergibt sich in isothermen Parametern

$$ds^2 = \lambda(u_1, u_2) (du_1^2 + du_2^2), \quad K = -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \lg \lambda}{\partial u_2^2} \right) = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \lg \lambda.$$

Für konstante negative Krümmung $K = -\frac{1}{2}$ genügt λ der Differentialgleichung

$$\Delta \lg \lambda = \lambda, \quad \text{bzw.} \quad \Delta w = e^w \quad \text{für} \quad \lambda = e^w$$

mit der allgemeinen Lösung¹³

¹² Vgl. (10), S. 287-288.

¹³ Vgl. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. Paris 1896, p. 97.

$$w = \lg \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \Re f(u)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \Re f(u)\right)^2}{\frac{(\Re f(u))^2}{2}},$$

$$\lambda = 2 \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \Re f(u)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \Re f(u)\right)^2}{(\Re f(u))^2} \geq 0, \quad (24)$$

worin $\Re$ den Realteil einer analytischen Funktion $f(u)$ mit $u = u_1 + i u_2$ bedeutet. Für $n = 4$ hat *L. Pf. Eisenhart* die folgende Klasse reeller Minimalflächen angegeben:¹⁴

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = \Re \varphi(u) = x_3(u_1, u_2), \quad x_4 = \Im \varphi(u) = x_4(u_1, u_2); \quad u = u_1 + i u_2.$$

$\Re$ und $\Im$ bedeuten Real-, bzw. Imaginärteil der analytischen Funktion $\varphi(u)$. u_1 und u_2 sind isotherme Parameter dieser Flächen, denn mit Rücksicht auf die *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen für die Funktionen $x_3(u_1, u_2)$ und $x_4(u_1, u_2)$ gilt

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial u_1}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial u_2}\right)^2 = g_{22}, \quad g_{12} = 0$$

oder auch:

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u_2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_4}{\partial u_2}\right)^2 = g_{22} = \lambda(u_1, u_2).$$

Im Gegensatz zu den allgemeinen reellen Minimalflächen des R_4 ¹⁵ hängen die Flächen (25) nur von einer analytischen Funktion einer komplexen Veränderlichen u ab. Wir transformieren auf isotrope Parameter $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ und erhalten

$$u_1 + i u_2 = \bar{u}_1, \quad u_1 - i u_2 = \bar{u}_2, \quad u_1 = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}, \quad u_2 = \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}{2i}, \quad \bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = 0.$$

Auf den isotropen Kurven $\bar{u}_1 = \text{const.}$, bzw. $\bar{u}_2 = \text{const.}$ bestehen also die Beziehungen

$$u_1 + i u_2 = x_1 + i x_2 = c_1, \quad \text{bzw.} \quad u_1 - i u_2 = x_1 - i x_2 = c_2.$$

¹⁴ Vgl. *L. Pf. Eisenhart*, Minimal surfaces in Euclidean four space. Amer. J. of Math. (4) 34, S. 215–236 (1912).

¹⁵ Vgl. (10), S. 275.

Demnach liegen die isotropen Kurven der *Eisenhartschen* Minimalflächen in den konjugiert-komplexen isotropen R_3 $x_1 \pm i x_2 = \text{const.}$ des R_4 . Jede in einem isotropen R_3 des R_4 gelegene isotrope Kurve liegt aber notwendig in einer vollisotropen Ebene dieses R_3 .¹⁶ Das bedeutet:

V. Die *Eisenhartschen* Minimalflächen des R_4 sind Schiebflächen ebener in vollisotropen Ebenen des R_4 gelegener konjugiert-komplexer isotroper Kurven.

Da sämtliche Ableitungen des Kurvenortsvektors einer in einer vollisotropen Ebene gelegenen isotropen Kurve isotrop sind (die Kurve ist unbeschränkt isotrop), verschwinden alle Integralinvarianten (4), (für beliebige Werte k). Daher gilt:

VI. Auf den *Eisenhartschen* Minimalflächen des R_4 gibt es keine *Study-Vessiotischen* Flächenparameter.

Nunmehr betrachten wir ins Komplexe erweiterte *Eisenhartsche* Minimalflächen in R_4

$$\xi = \eta(u_1) + \zeta(u_2), \quad \eta'^2 = \eta''^2 = \dots = 0, \quad \dot{\zeta}^2 = \ddot{\zeta}^2 = \dots = 0 \quad (26)$$

und berechnen die Determinante $(\eta', \eta'', \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$. Durch Quadrieren erhalten wir:

$$(\eta' \eta'' \dot{\zeta} \ddot{\zeta}) = g_{12} \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} = -g_{12}^3 K, \quad K \neq 0. \quad (27)$$

Andererseits müßte aber die *Gaußsche* Krümmung verschwinden, wenn sie konstant wäre. Denn aus (27) folgt für konstante *Gaußsche* Krümmung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{(\eta' \eta'' \dot{\zeta} \ddot{\zeta})}{-g_{12}^3} \right) &= \frac{-g_{12}^3 (\eta' \eta''' \ddot{\zeta} \ddot{\zeta}) + (\eta' \eta'' \dot{\zeta} \ddot{\zeta}) 3g_{12}^2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1}}{g_{12}^6} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{(\eta' \eta'' \dot{\zeta} \ddot{\zeta})}{-g_{12}^3} \right) &= \frac{-g_{12}^3 (\eta', \eta'', \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) + (\eta', \eta'', \dot{\zeta}, \ddot{\zeta}) 3g_{12}^2 \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2}}{g_{12}^6} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Da die Kurven η und ζ in totalisotropen Ebenen liegen, gilt

$$\eta''' = \alpha_1 \eta' + \alpha_2 \eta'', \quad \ddot{\zeta} = \beta_1 \dot{\zeta} + \beta_2 \ddot{\zeta}$$

¹⁶ Vgl. (10), S. 267.

und die Koeffizienten α_1 und α_2 sind Funktionen von u_1 allein, diejenigen β_1, β_2 solche von u_2 allein. Daher sind die Determinanten $(\eta', \eta'', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ und $(\eta' \eta''', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ sowie $(\eta', \eta'', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ und $(\eta', \eta''', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ proportional (oder $(\eta', \eta''', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$, bzw. $(\eta', \eta'', \dot{\eta}, \ddot{\eta})$ verschwinden). In allen Fällen ergeben sich aus (28) Relationen der Art:

$$\frac{\partial \lg g_{12}}{\partial u_1} = \frac{\alpha_2(u_1)}{3}, \quad \frac{\partial \lg g_{12}}{\partial u_2} = \frac{-\beta_2(u_2)}{3}, \quad \frac{\partial^2 \lg g_{12}}{\partial u_1 \partial u_1} = 0; \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} = 0$$

und daher im Widerspruch zur Voraussetzung $K = 0$. Da die reellen *Eisenhartschen* Minimalflächen Spezialfälle der Flächen (26) sind, ist gezeigt:

VII. *Unter den komplexen Minimalflächen des R_4 mit ebenen nicht-linearen isotropen Schiebkurven gibt es keine mit konstanter nichtverschwindender Gaußscher Krümmung.*

VIII. *Unter den Eisenhartschen Minimalflächen des R_4 gibt es keine mit konstanter negativer Gaußscher Krümmung.*

Mit diesem Ergebnis ist mit Rücksicht auf (24) und (25) die Unverträglichkeit der Beziehung

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} \Re f(u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \Re f(u) \right)^2}{(\Re f(u))^2} = \\ & = 1 + \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \Re \varphi(u) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u_2} \Re \varphi(u) \right)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

für zwei analytische Funktionen $f(u)$ und $\varphi(u)$ gezeigt. Um das Existenzproblem reeller Minimalflächen mit konstanter negativer *Gaußscher* Krümmung in R_4 allgemein zu entscheiden, könnte man die integrallose Darstellung der allgemeinen reellen Minimalflächen des R_4 mit Hilfe von zwei analytischen Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ benutzen und die (29) entsprechende Relation zwischen den drei analytischen Funktionen $f(u)$, $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ aufstellen. Dabei bliebe die linke Seite dieser Relation ungeändert, während rechts die Realteile der analytischen Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ mit den Ableitungen eingehen, die sich bei der Berechnung von $r_1^2 = r_2^2 = g_{11} = g_{22} = \lambda$ aus der integrallosen Darstellung ergeben.

Darjeeling (Himalaya), Oktober 1950.

Über die endlichen nilpotenten Gruppen.

Von

L. Rédei und J. Szép, Szeged (Ungarn).

(Eingelangt am 27. November 1950)

Wir bezeichnen mit $\{\dots\}$ die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte Gruppe und mit G' die Kommutatorgruppe einer Gruppe G .

Betrachten wir eine endliche Gruppe $\{\alpha, S\}$, wobei α ein Element und S ein System von Elementen bezeichnet, und nehmen an, daß die Ordnung von α die Potenz einer Primzahl p ist. Es bezeichnen noch m, n die kleinsten nichtnegativen ganzen Zahlen mit

$$\{\alpha^{p^m}, S\} = \{S\} \text{ bzw. } \{\alpha^{p^n}, S\}' = \{S\}'. \quad (1)$$

(Gewiß gilt $n \leq m$.) Offenbar gelten

$$\{\alpha, S\} \supseteq \{\alpha^p, S\} \supseteq \dots \supseteq \{\alpha^{p^{m-1}}, S\} \supset \{\alpha^{p^m}, S\} (= \{S\}), \quad (2)$$

$$\{\alpha, S\}' \supseteq \{\alpha^p, S\}' \supseteq \dots \supseteq \{\alpha^{p^{n-1}}, S\}' \supset \{\alpha^{p^n}, S\}' (= \{S\}'). \quad (3)$$

(Die trivialen Fälle $m=0, 1$, bzw. $n=0, 1$ kann man außer acht lassen.) Es wäre irrtümlich zu meinen, daß (2) und (3) stets stark monoton abnehmend sind, d. h. mit „ $\supset$ “ statt „ $\supseteq$ “ gelten. (Beispiele, wo das nicht der Fall ist, geben wir unten an.) Für die endlichen Gruppen, die nilpotent, d. h. das direkte Produkt ihrer Sylowgruppen sind, gilt dagegen der folgende:

Satz. Ist $\{\alpha, S\}$ eine endliche nilpotente Gruppe, wobei α ein Element von einer Ordnung p^e (p Primzahl) und S ein System von Elementen ist, so gilt mit passenden ganzen Zahlen m, n ($e \geq m \geq n \geq 0$):

$$\{\alpha, S\} \supset \{\alpha^p, S\} \supset \dots \supset \{\alpha^{p^m}, S\} (= \{S\}), \quad (4)$$

$$\{\alpha, S\}' \supset \{\alpha^p, S\}' \supset \dots \supset \{\alpha^{p^n}, S\}' (= \{S\}'). \quad (5)$$

Besonders brauchbar zu sein scheint uns die folgende (im wesentlichen äquivalente):

Teilaussage des Satzes. Es seien α, S, p wie im Satz. Dann:

$$\text{aus } \{\alpha, S\} \supset \{S\} \text{ folgt } \{\alpha, S\} \supset \{\alpha^p, S\},$$

aus $\{\alpha, S'\} \supset \{S'\}$ folgt $\{\alpha, S'\} \supset \{\alpha^p, S'\}$.

Mit Nachdruck betonen wir hiervon den folgenden:

Spezialfall des Satzes. Ist die endliche p -Gruppe $\{\alpha, \beta\}$ mit den erzeugenden Elementen α, β nichtzyklisch oder sogar nichtabelsch, so gilt $\{\alpha, \beta\} \supset \{\alpha^p, \beta\}$, bzw. sogar $\{\alpha, \beta'\} \supset \{\alpha^p, \beta'\}$.

Über dieses Beispiel bemerken wir, daß sein Beweis nicht wesentlich leichter wäre als der des obigen Satzes.

Korollar des Satzes. Es sei

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \quad (6)$$

eine endliche nilpotente Gruppe erzeugt durch die Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, deren Ordnung der Reihe nach eine Potenz (> 1) der Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ ist.

Läßt sich in (6) kein α_i streichen, so bekommt man aus (6) 2^k verschiedene Gruppen, indem man auf alle möglichen Arten einige α_i durch $\alpha_i^{p_i}$ ersetzt.

Läßt sich in der Kommutatorgruppe

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}' \quad (7)$$

von (6) keins der $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ($l \leq k$) streichen, so bekommt man aus (7) 2^l verschiedene Kommutatorgruppen, indem man auf alle möglichen Arten einige α_i ($i = 1, \dots, l$) durch $\alpha_i^{p_i}$ ersetzt.

Gleich zeigen wir, daß dieses Korollar aus dem Satz folgt. Nehmen wir an, daß zwei der in der ersten Hälfte des Korollars genannten Gruppen gleich sind:

$$\{\beta_1, \dots, \beta_k\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\},$$

wobei sowohl β_i als auch γ_i gleich α_i oder $\alpha_i^{p_i}$ ist, insbesondere aber z. B. $\beta_1 \neq \gamma_1$ gilt. Nach beiderseitiger Adjunktion von $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ folgt noch mehr

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} = \{\alpha_1^{p_1}, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}.$$

Dies steht mit (4) in einem Widerspruch, woraus die erste Hälfte des Korollars folgt, auch die zweite Hälfte sieht man ähnlich ein.

Mit zwei Beispielen wollen wir zeigen, daß der Satz für nicht nilpotente endliche Gruppen im allgemeinen falsch ist. In diesen Beispielen wird es sich um Untergruppen der symmetrischen Permutationsgruppe P_9 und P_5 der 9 Elemente 1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, d , bzw. der 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 handeln.

Beispiel 1. Es sei $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4\ d)$, $\beta = (1\ 2\ 3\ 5)$ ($a\ b\ c\ d$). Dann gelten

$$\{\alpha, \beta\} \supset \{\alpha^2, \beta\} = \{\alpha^4, \beta\} \supset \{\alpha^8, \beta\} (= \{\beta\}), \quad (8)$$

$$\{\alpha, \beta'\} \supset \{\alpha^2, \beta'\} = \{\alpha^4, \beta'\} \supset \{\alpha^8, \beta'\} (= \{\beta'\} = 1). \quad (9)$$

Beispiel 2. Es sei $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4)$, $\beta = (1\ 2\ 5)$. Dann gelten

$$\{\alpha, \beta\} \supset \{\alpha^2, \beta\} \supset \{\alpha^4, \beta\} (= \{\beta\}), \quad (10)$$

$$\{\alpha, \beta'\} = \{\alpha^2, \beta'\} \supset \{\alpha^4, \beta'\} (= \{\beta'\} = 1). \quad (11)$$

Man beachte, daß wohl α in diesen Beispielen von 8-ter, bzw. 4-ter Ordnung aber $\{\alpha, \beta\}$ nicht nilpotent ist. Beide Beispiele suggerieren uns, daß es mit den „ $\supset$ “ und „ $=$ “ in (2), (3) für allgemeine endliche Gruppen bunt aussehen kann.

Für Beispiel 1 genügt es offenbar

$$\{\alpha, \beta'\} \neq \{\alpha^2, \beta'\}, \{\alpha^2, \beta\} = \{\alpha^4, \beta\}, \{\alpha^4, \beta'\} \neq 1 \quad (12)$$

zu zeigen. Wir setzen

$$\gamma = (a\ b\ c\ d), \quad \varrho = (1\ 2\ 3\ 4), \quad \sigma = (1\ 2\ 3\ 5).$$

Wegen

$$\alpha^2 = \varrho\gamma, \quad \beta = \sigma\gamma, \quad \varrho\gamma = \gamma\varrho, \quad \sigma\gamma = \gamma\sigma$$

ist

$$\{\alpha^2, \beta\} \subseteq P_5 \times \{\gamma\}, \quad (13)$$

wobei „ $\times$ “ das direkte Produkt bezeichnet. Andererseits liegt der Kommutator $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = (3\ 4\ 5\ c\ b)$ nicht in der rechten Seite von (13), woraus die erste Ungleichung in (12) folgt, die zweite ist auch klar. Bei Berücksichtigung von (13) genügt es für die Gleichung in (12)

$$\{\varrho^2, \sigma\} = P_5, \quad \gamma^2 \in \{\alpha^4, \beta\}, \quad \gamma \notin \{\alpha^2, \beta\}$$

zu zeigen. Das erste ist wegen $\varrho^2\sigma^2 = (2\ 4\ 5)$, $\sigma = (1\ 2\ 3\ 5)$, $\varrho^2\sigma\varrho^2\sigma^3 = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$ richtig. Das zweite gilt auch wegen $\gamma^2 = (\alpha^4\beta)^6$. Das dritte sieht man auch ein, denn wäre $\gamma \in \{\alpha^2, \beta\} = \{\varrho\gamma, \sigma\gamma\}$, so müßte

$$\gamma = (\varrho\gamma)^{i_1}(\sigma\gamma)^{i_2} \dots \quad (i_1 + i_2 + \dots \equiv 1 \pmod{4})$$

sein, also zugleich $1 = \varrho^{i_1}\sigma^{i_2} \dots$ gelten, was doch unmöglich ist, da rechts eine ungerade Permutation steht.

Für Beispiel 2 genügt es sich zu überzeugen, daß $\{\alpha, \beta\} = P_5$, dagegen $\{\alpha^2, \beta\}$ die alternierende Untergruppe von P_5 ist.

Bemerkungen. Wir vermuten, daß die den Untergruppenketten (4), (5) zugehörigen relativen Ordnungen (d. h. Indizes) monoton abnehmende Folgen bilden.

Wir bemerken auch, daß die erste Hälfte des Satzes (in der Form des Korollars) der eine von uns schon früher¹ bewiesen hat. Vollständigkeitshalber wiederholen wir hier auch den Beweis der ersten Hälfte des Satzes. Es ist klar, daß nur der auf p -Gruppen bezügliche Teil unserer Resultate wesentlich ist, die Verallgemeinerung auf nilpotente Gruppen ist trivial. Im hier folgenden Beweis machen wir von dieser Bemerkung keine Verwendung, da dadurch keine Verkürzung entstehen würde.

Beweis des Satzes. Vor allem sehen wir, daß es genügt, statt des Satzes nur die anschließend formulierte „Teilaussage“ zu beweisen, denn aus dieser folgt der Satz sofort durch Induktion.

Unser Beweis wird durchsichtiger, wenn wir explizit

$$S = \alpha_1, \dots, \alpha_k$$

setzen, wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ die Elemente von S sind. Ferner setzen wir

$$G = \{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad H = \{\alpha^p, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \quad K = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}. \quad (14)$$

Erstens haben wir zu zeigen: aus

$$G \supset K \quad (15)$$

folgt

$$G \supset H. \quad (16)$$

Nehmen wir hierzu (16) falsch an, dann gilt $G = H$. Hieraus folgt nach (14)

$$G/G' = \{\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\} = \{\bar{\alpha}^p, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}, \quad (17)$$

also noch mehr

$$\bar{\alpha} \in \{\bar{\alpha}^p, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\},$$

wobei $\bar{\varrho} = \varrho G'$ ($\varrho \in G$) die Elemente der Faktorgruppe G/G' bezeichnet. Da diese Abelsch ist, so folgt weiter

$$\bar{\alpha}^{-1+p^x} \in \{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}$$

mit einem ganzen x . Mit α zusammen hat auch $\bar{\alpha}$ eine Potenz von p zur Ordnung, somit gilt sogar $\bar{\alpha} \in \{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}$. Dies wegen (17) ergibt $G/G' = \{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}$, also

$$G = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, G'\}.$$

Da aber G nilpotent ist, so läßt sich hier G' bekanntlich streichen², wonach wegen (14) $G = K$ entsteht. Dies steht mit (15) im Gegensatz, womit (16) bewiesen ist.

¹ L. Rédei, Über die Basen endlicher Gruppen, Math. Zeitschr.

² Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I (1937), 1–151, insb. S. 107–108.

Zweitens haben wir zu zeigen: aus

$$G' \supset K' \quad (18)$$

folgt

$$G' \supset H'. \quad (19)$$

Zum Beweis machen wir die Induktionsannahme, daß die Behauptung für die Gruppen von kleinerer Ordnung als G schon bewiesen ist. Da wegen (18) noch mehr (15) gilt, so gilt nach dem eben bewiesenen auch (16).

Wenn $G' \subseteq H$ nicht gilt, so schließen wir leicht, denn dann gilt $G' \subseteq H'$ noch weniger, also $G' \neq H'$. Andererseits folgt aus (14) $G' \supseteq H'$, beide ergeben (19).

Weiter brauchen wir nur noch den anderen Fall

$$G' \subseteq H \quad (20)$$

zu betrachten. Hieraus folgt bekanntlich, daß H normal in G enthalten ist, folglich gilt nach (14)

$$O(G/H) = p, \quad (21)$$

wobei $O(x)$ die Ordnung von x bezeichnet, gleichfalls ob x eine Gruppe oder ein Gruppenelement ist.

Bezeichne N einen gemeinsamen Normalteiler von G und H , die Elemente von G/N bezeichnen wir mit $\bar{g} = gN$ ($g \in G$). Wenn es ein $N (\neq 1)$ mit

$$(G/N)' = \{\bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}' \supset \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}'$$

gibt, so ist das wieder ein Fall, in dem wir schnell zum Ziel kommen. Dann gilt nämlich nach der Induktionsannahme

$$\{\bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}' \supset \{\bar{a}^p, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}',$$

d. h. nach (14) $G'N \supset H'N$ also muß noch mehr (19) gelten.

Im übriggebliebenen Fall muß für alle $N (\neq 1)$

$$\{\bar{a}, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}' = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k\}'$$

gelten. Dies schreibt sich nach (14) als $G'N = K'N$, somit gilt noch mehr

$$G' \subseteq K'N \quad (22)$$

und zwar dies — wir wiederholen — für jeden gemeinsamen Normalteiler $N (\neq 1)$ von G und H .

Wir bezeichnen mit G^* , H^* das Zentrum von G , bzw. H und bilden den Durchschnitt

$$D = G^* \cap H^*. \quad (23)$$

Wäre $D = 1$, so folgt aus (23) wegen $H^* \cong G^* \cap H$ gewiß

$$G^* \cap H = 1,$$

also $O(G^*)O(H) \leq O(G)$, d. h. nach (21) $O(G^*) \leq p$. Andererseits gilt nach (14) $p \mid O(G)$ also nach bekanntem Satz $p \mid O(G^*)$. Beide ergeben $O(G^*) = p$, ferner muß nach vorigem wegen (21) auch $G = H \times G^*$ gelten. Dann muß $H^* = 1$ sein, da aber H nilpotent (oder 1) ist, so folgt $H = 1$, $G = G^*$. Dies steht mit (18) in einem Widerspruch, somit ist der jetzt betrachtete Fall $D = 1$ unmöglich.

Im übriggebliebenen Fall $D \neq 1$ bezeichne δ ein beliebiges Element von Primzahlordnung von D . Da $\{\delta\}$ normal in G und H ist, so muß (22) für $N = \{\delta\}$ gelten. Hieraus folgt wegen (14), (18)

$$G' = K' \{\delta\}, \quad O(\delta) = p. \quad (24)$$

Bekanntlich ist die Kommutatorgruppe eines Normalteilers einer Gruppe stets auch selbst normal in dieser Gruppe. Wegen (24) ist G' in $\{K, \delta\}$ enthalten, also ist diese Gruppe normal in G , ferner hat sie K' zur Kommutatorgruppe, folglich ist diese normal in G .

Wegen (24) gilt nun für jedes feste α_i ($i = 1, \dots, k$)

$$\alpha \alpha_i \alpha^{-1} \alpha_i^{-1} = \varrho \delta^x \quad (\varrho \in K'). \quad (25)$$

Wir zeigen, daß für jedes v (≥ 1) mit demselben x

$$\alpha^v \alpha_i \alpha^{-v} \alpha_i^{-1} = \sigma \delta^{vx} \quad (\sigma \in K') \quad (26)$$

gilt (σ hängt von v ab). Für $v = 1$ ist (26) richtig. Gilt (26) für ein festes v , so berechnet man nach (25) (wegen $\delta \in G^*$):

$$\alpha^{v+1} \alpha_i \alpha^{-v-1} = \alpha \sigma \delta^{vx} \alpha_i \alpha^{-1} = (\alpha \sigma \alpha^{-1}) (\alpha \alpha_i \alpha^{-1}) \delta^{vx} = (\alpha \sigma \alpha^{-1}) \varrho \delta^{(v+1)x} \alpha_i.$$

Da K' normal in G ist, so liest man hiervon die Richtigkeit von (26) ab.

Hieraus folgt für $v = p$ wegen (24)

$$\alpha^p \alpha_i \alpha^{-p} \alpha_i^{-1} \in K' \quad (i = 1, \dots, k).$$

Dies nach (14) ergibt (da K' normal in G ist):

$$H' = \{\alpha^p, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}' = K'.$$

Hieraus und aus (18) folgt (19), womit wir den Beweis des Satzes beenden haben.

Über geschlossene Bewegungsvorgänge.

Von

Hans Robert Müller, Graz.

(Eingelangt am 29. Dezember 1950.)

Wir gehen von einem zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D auf der Einheitskugel aus. Mit der Rastkugel K' sei das Rastkreuz $\{\mathfrak{D}; \mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_3'\}$, ein als ruhend angenommenes rechtwinkeliges, rechtehändiges Dreibein mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{E}_i'$ und dem Ursprung $\mathfrak{D}$ im Kugelmittelpunkt starr verbunden. Für die bewegliche Kugel K (Gangkugel) werde ein ebensolches Achsenkreuz, das Gangkreuz $\{\mathfrak{D}; \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3\}$ mit dem gleichen Ursprung gewählt. Gilt nun

$$\mathfrak{E}_i = \sum A_{ik} \mathfrak{E}_k' \quad (1)$$

wobei die A_{ik} eine orthogonale Matrix bilden und periodische Funktionen eines reellen Parameters t mit der Periode 2π sind, so beschreibt K einen zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D gegenüber K' . Die Änderungen der $\mathfrak{E}_i$ können wir wiederum auf das Gangkreuz beziehen und folgendes System von Ableitungsgleichungen finden:

$$\left. \begin{aligned} d\mathfrak{E}_1 &= \mathfrak{E}_2 \Omega_3 - \mathfrak{E}_3 \Omega_2 \\ d\mathfrak{E}_2 &= \mathfrak{E}_3 \Omega_1 - \mathfrak{E}_1 \Omega_3 \\ d\mathfrak{E}_3 &= \mathfrak{E}_1 \Omega_2 - \mathfrak{E}_2 \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die Ω_i sind hierin *Pfaffsche* Formen in der Veränderlichen t , haben also die Gestalt $\Omega_i = f_i(t) \cdot dt$. Wird ein Punkt $\mathfrak{X}$ an der Gangkugel K befestigt, so sind in

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_1 X_1 + \mathfrak{E}_2 X_2 + \mathfrak{E}_3 X_3 \quad (3)$$

die Werte X_i fest und gilt

$$(\mathfrak{X}\mathfrak{X}) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

Wegen (2) finden wir für die Ableitung

$$d\mathfrak{X} = \mathfrak{E}_1 (\Omega_2 X_3 - \Omega_3 X_2) + \mathfrak{E}_2 (\Omega_3 X_1 - \Omega_1 X_3) + \mathfrak{E}_3 (\Omega_1 X_2 - \Omega_2 X_1). \quad (4)$$

Nach Einführung des Drehvektors

$$\Omega = \mathfrak{E}_1 \Omega_1 + \mathfrak{E}_2 \Omega_2 + \mathfrak{E}_3 \Omega_3 \quad (5)$$

können wir statt (4) das Vektorprodukt

$$d\mathfrak{X} = \Omega \times \mathfrak{X} \quad (6)$$

schreiben. Der Einheitsvektor

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_1 P_1 + \mathfrak{E}_2 P_2 + \mathfrak{E}_3 P_3 \quad (7)$$

mit

$$P_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_0}, \quad \Omega_0^2 = (\Omega\Omega) = \Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 \quad (8)$$

weist zum augenblicklichen Drehpol. $\mathfrak{P}$ beschreibt in K die Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ von D ; hierbei beziehen wir (7) auf K , sehen also die $\mathfrak{E}_i$ als fest an. Berücksichtigen wir jedoch noch (1), so beschreibt $\mathfrak{P}$ in K' die Rastpolbahn, wofür wir $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'(t)$ setzen. Beim Ablauf von D rollt die Kurve $\mathfrak{P}(t)$ auf $\mathfrak{P}'(t)$. Eine Vorzeichenänderung von Ω_0 bewirkt den Übergang zum Gegenpunkt von $\mathfrak{P}$ als Drehpol. Ω_0 ist der infinitesimale Drehwinkel zum Zeitpunkt t . Schließen in benachbarten Punkten der Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ die berührenden Großkreise den Winkel $\Gamma = \Gamma(t)$ ein (geodätischer Kontingenzwinkel) und hat $\Gamma' = \Gamma'(t)$ für die Rastpolbahn $\mathfrak{P}'(t)$ die gleiche Bedeutung, so gilt, wie unmittelbar einzusehen (oder natürlich auch eine einfache Rechnung zeigt)

$$\Gamma' - \Gamma = \Omega_0. \quad (9)$$

Γ und Γ' können auch als Elemente der geodätischen Krümmungen der Polbahnen gedeutet werden. Durch Integration längs unseres geschlossenen Drehvorganges D finden wir

$$\Gamma' - \Gamma = \oint \Omega_0. \quad (10)$$

$G = \oint \Gamma$, $G' = \oint \Gamma'$ sind hierin die geodätischen Gesamtkrümmungen der Polbahnen; in

$$\oint \Omega_0 = 2\pi M \quad (11)$$

ist M die Drehzahl unseres Bewegungsvorganges auf der Kugel.

Der in K befestigte Punkt $\mathfrak{X}$ beschreibt bei D eine geschlossene Bahnkurve, für deren geodätische Gesamtkrümmung $G_{\mathfrak{X}}$ W. Blaschke¹ folgenden Ausdruck fand:

$$G_{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{P}\mathfrak{X}) + 2\pi N_{\mathfrak{X}} = \sum V_i X_i + 2\pi N_{\mathfrak{X}}. \quad (12)$$

Darin ist

¹ W. Blaschke, Zur Bewegungsgeometrie auf der Kugel. Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1948/2.

$$V_i = \oint \Omega_i \quad (13)$$

und bedeutet

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{C}_1 V_1 + \mathfrak{C}_2 V_2 + \mathfrak{C}_3 V_3 \quad (14)$$

den „Steiner-Vektor“ von D . Die ganze Zahl N_x ist die Umlaufzahl der Gangpolbahn $\mathfrak{P}(t)$ um den Punkt $\mathfrak{X}$. Es stellt

$$\oint dT = 2\pi N_x \quad (15)$$

die Gesamtrichtungsänderung (Integral der Richtungsänderung) der Bahntangente $\mathfrak{L}$ des Punktes $\mathfrak{X}$ gegenüber K' dar.

E. Study's Übertragungsprinzip der Liniengeometrie besteht in der eindeutigen Abbildung der gerichteten Geraden des dreidimensionalen Euklidischen Raumes auf die dualen Punkte der Einheitskugel. Besitzt ein Strahl $\mathfrak{G}$ den Richtungsvektor $\mathfrak{g}$ und den Momentvektor $\bar{\mathfrak{g}}$ um den Ursprung $\mathfrak{o}$, so wird das Vektorpaar $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}$ zum dualen Einheitsvektor $\mathfrak{G} = \mathfrak{g} + \varepsilon \bar{\mathfrak{g}}$ mit $\varepsilon^2 = 0$ zusammengefaßt. Statt $(\mathfrak{g}\mathfrak{g}) = 1$, $(\mathfrak{g}\bar{\mathfrak{g}}) = 0$ können wir nun kurz $(\mathfrak{G}\mathfrak{G}) = 1$ schreiben. — Der Gruppe der dualen Drehungen der Einheitskugel entspricht nun die Euklidische Bewegungsgruppe des Linienraumes.

Erweitern wir nun den zwangsläufigen, geschlossenen Drehvorgang D ins Duale, so erhalten wir durch Übertragung einen zwangsläufigen, geschlossenen Bewegungsvorgang B im Euklidischen Linienraum. Hierzu sehen wir alle durch große Buchstaben bezeichneten Größen als duale Zahlen, bzw. Vektoren an, deren Realteile wir durch die zugehörigen kleinen Buchstaben ausdrücken; die Dualteile mögen dann durch Überstreichen angedeutet werden. Bei dieser Erweiterung ist lediglich auf das Auftreten von Nullteilern zu achten!

Im dreidimensionalen Raum vollführt nun das Gangkreuz $\{\mathfrak{o}; e_1, e_2, e_3\}$ als Vertreter des Gangraumes R den zwangsläufigen Bewegungsvorgang B gegenüber dem Rastraum R' mit dem Rastkreuz $\{\mathfrak{o}'; e'_1, e'_2, e'_3\}$. Für die Achsenschnittpunkte $\mathfrak{o}, \mathfrak{o}'$ sind die Inzidenzbedingungen erfüllt:

$$\bar{e}_i = \mathfrak{o} \times e_i, \quad \bar{e}'_i = \mathfrak{o}' \times e'_i. \quad (16)$$

Der Bewegungsvorgang auf der Kugel kann im Augenblick als infinitesimale Drehung um den Drehpol $\mathfrak{P}$ mit dem Drehwinkel Ω_0 angesehen werden. Dem entspricht im Linienraum die infinitesimale Schraubung, die sich aus der Drehung um die Schraubachse $\mathfrak{P}$ durch den Winkel ω_0 und der Schiebung in ihrer Richtung um die Schieb-strecke $\bar{\omega}_0$ zusammensetzt. Der Schraubparameter ist somit

$$k = \frac{\bar{\omega}_0}{\omega_0} = \frac{(\omega\bar{\omega})}{(\omega\omega)} = \frac{\omega_1\bar{\omega}_1 + \omega_2\bar{\omega}_2 + \omega_3\bar{\omega}_3}{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}, \quad (17)$$

Den von $\mathfrak{P}$ in K , bzw. K' beschriebenen Polbahnen entsprechen nun in R , bzw. R' die auf einander schrotenden Achsenflächen. — Die Geschlossenheit des sphärischen Drehvorgangs D bewirkt, daß nicht nur die Polbahnen geschlossene Kurven auf der Kugel, sondern auch die Achsenflächen geschlossene Regelflächen im Raum sind. Durch duale Übertragung wird aus der geschlossenen Bahnkurve eines in K befestigten Punktes $\mathfrak{X}$ die geschlossene Bahnfläche der im Gangraum R festen Geraden $\mathfrak{X}$.

Ein Punkt $\mathfrak{X}$ beschreibe eine (duale) Kurve auf der Einheitskugel. Längs dieser Kurve betrachten wir den Flächenstreifen (Krümmungsstreifen) und denken uns ein begleitendes rechtwinkeliges Dreiein mit den Einheitsvektoren $\mathfrak{X}_i$ angebracht. Deuten wir die Ableitungen nach t durch Punkte an, so können wir setzen

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_3, \quad \frac{\dot{\mathfrak{X}}}{P} = \mathfrak{X}_1, \quad \frac{\mathfrak{X} \times \dot{\mathfrak{X}}}{P} = \mathfrak{X}_2. \quad (18)$$

Die Ableitungsgleichungen besitzen dann die Gestalt

$$\dot{\mathfrak{X}}_1 = Q\mathfrak{X}_2 - P\mathfrak{X}_3, \quad \dot{\mathfrak{X}}_2 = -Q\mathfrak{X}_1, \quad \dot{\mathfrak{X}}_3 = P\mathfrak{X}_1, \quad (19)$$

wobei

$$P = \sqrt{(\dot{\mathfrak{X}}\dot{\mathfrak{X}})}, \quad Q = \frac{(\mathfrak{X} \dot{\mathfrak{X}} \ddot{\mathfrak{X}})}{(\dot{\mathfrak{X}}\dot{\mathfrak{X}})} \quad (20)$$

gesetzt wurde. $P \cdot dt = dS$ bedeutet das (duale) Bogenelement, $Q : P$ (die duale) geodätische Krümmung der Bahnkurve des Punktes $\mathfrak{X}$.

$$G = \oint Q dt \quad (21)$$

ist dann die geodätische Gesamtkrümmung der sphärischen Kurve $\mathfrak{X}(t)$.

Im Linienraum ergibt sich durch duale Übertragung eine Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ mit den dualen Differentialinvarianten $P = p + \varepsilon \bar{p}$ und $Q = q + \varepsilon \bar{q}$; $\mathfrak{X}_1$ ist jeweils Zentralnormale, $\mathfrak{X}_2$ Zentraltangente.

Der reellen Integralinvarianten $\int \bar{q} dt$ kommt die geometrische Bedeutung zu, längs der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ unserer Strahlfläche die Entfernung r des Kehlpunktes von einer *Querlinie* zu messen². Eine Quer-

² W. Blaschke, Vorl. ü. Differentialgeometrie I, 4. Aufl. Berlin-Springer, 1945, S. 272.

linie ist hierbei eine Kurve der geradlinigen Fläche, die die Erzeugenden senkrecht durchsetzt. — Bei einer geschlossenen Regelfläche kehrt die Erzeugende $\mathfrak{X}$ wiederum in ihre Ausgangslage zurück, wenn der Parameter gerade einmal die Periode durchläuft; die Querlinie schließt sich jedoch im allgemeinen nicht, sondern trifft dieselbe Erzeugende in einem Punkt, der vom Ausgangspunkt verschieden ist. Die Entfernung I dieser beiden Punkte, die von der Wahl der Querlinie auf der geschlossenen Regelfläche unabhängig ist, wird nach *W. Blaschke* als „*Öffnung*“ der geschlossenen Regelfläche bezeichnet. Diese Integralinvariante

$$I = |r(2\pi) - r(0)| = \left| \oint \bar{q} dt \right| \quad (22)$$

spielt auch in der geometrischen Optik eine wichtige Rolle.

Auch für die Integralinvariante $\int q dt$ kann eine geometrische Deutung gefunden werden, die der von $\int \bar{q} dt$ dual gegenübersteht. *Wir umschreiben der Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ so eine Torse $\mathfrak{Y}(t)$, daß deren Erzeugende $\mathfrak{Y}$ jeweils auf der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ senkrecht steht.* Dies führt zum Ansatz

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1 \sin \Phi + \mathfrak{X}_2 \cos \Phi, \quad \Phi = \varphi + \varepsilon \bar{\varphi}. \quad (23)$$

Der Strahl $\mathfrak{Y}$ ist hierbei gegen die Zentraltangente $\mathfrak{X}_2$ unter dem Winkel φ geneigt und besitzt vom Zentralpunkt der Strahlfläche den kürzesten Abstand $\bar{\varphi}$.

Soll die Gerade $\mathfrak{Y}$ auch in der Tangentialebene ihres Schnittpunktes mit der Erzeugenden $\mathfrak{X}$ unserer Strahlfläche liegen, so muß sie auch die Nachbarerzeugende $\mathfrak{X} + d\mathfrak{X}$ schneiden, was das Verschwinden des folgenden Dualteiles bedingt

$$D(\dot{\mathfrak{X}}\mathfrak{Y}) = D(P \sin \Phi) = \bar{p} \cdot \sin \varphi + p \bar{\varphi} \cdot \cos \varphi = 0. \quad (24)$$

Aus (19) und (23) folgt

$$\dot{\mathfrak{Y}} = -\mathfrak{X}_1(Q - \dot{\Phi}) \cos \Phi + \mathfrak{X}_2(Q - \dot{\Phi}) \sin \Phi - \mathfrak{X}_3 P \sin \Phi, \quad (25)$$

$$(\dot{\mathfrak{Y}}\dot{\mathfrak{Y}}) = (Q - \dot{\Phi})^2 + P^2 \sin^2 \Phi. \quad (26)$$

Für eine Torse ist

$$D(\dot{\mathfrak{Y}}\dot{\mathfrak{Y}}) = 0, \quad (27)$$

was wegen (24) mit

$$(q - \dot{\varphi})(\bar{q} - \dot{\bar{\varphi}}) = 0 \quad (28)$$

gleichwertig ist.

Ist die Torse $\mathfrak{Y}(t)$ der Strahlfläche $\mathfrak{X}(t)$ umschrieben, so stimmen die Flächennormalen beider Flächen im jeweiligen Berührungspunkt überein, d. h. legen

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = -\mathfrak{X}_1 \cos \Phi + \mathfrak{X}_2 \sin \Phi \quad (29)$$

und

$$\mathfrak{Y} \times \dot{\mathfrak{Y}} = (-\mathfrak{X}_1 \cos \Phi + \mathfrak{X}_2 \sin \Phi) P \sin \Phi + \mathfrak{X}_3 (Q - \dot{\Phi}) \quad (30)$$

dieselbe Richtung fest. (Die Realteile unterscheiden sich nur um einen reellen Faktor.) Dies ergibt

$$q - \dot{\varphi} = 0 \quad (31)$$

und somit die Deutung von

$$\int q \, dt = \varphi \quad (32)$$

als *Neigungswinkel der umschriebenen Torse gegen die Zentralebene* in der Erzeugenden $\mathfrak{X}$. — Für eine geschlossene Fläche $\mathfrak{X}(t)$ schließt sich im allgemeinen die umschriebene Torse nicht, sondern kehrt, unter dem Winkel

$$\lambda = |\varphi(2\pi) - \varphi(0)| = |\oint q \, dt| \quad (33)$$

gegen die Ausgangslage geneigt, zur Erzeugenden $\mathfrak{X}$ zurück.

Das Verschwinden des zweiten Faktors von (28) führt zu den Querlinien und der oben erwähnten Deutung von

$$\int \bar{q} \, dt = \bar{\varphi} = r \quad (34)$$

(In diesem Fall muß die Berührung von Torse und Strahlfläche längs der Gratlinie der ersteren stattfinden, also

$$D(\mathfrak{X} \mathfrak{Y} \dot{\mathfrak{Y}}) = 0 \quad (35)$$

sein.) Für geschlossene Regelflächen sind beide Größen, der „*Öffnungswinkel*“ λ , wie die „*Öffnungsstrecke*“ r unabhängig von der Wahl des Ausgangselementes (Ebene, bzw. Punkt) auf der Erzeugenden $\mathfrak{X}$.

Nun übertragen wir die Formeln (10) und (12) über die geodätischen Gesamtkrümmungen in den Linienraum. Die Realteile liefern einmal Aussagen über die sphärischen Bildkurven der betreffenden geradlinigen Flächen, also nur über die im räumlichen Bewegungsvorgang enthaltenen reinen Drehbewegungen (Richtungsbewegungen). Sie können aber auch, so wie die Dualteile zu Aussagen über die Öffnungsgrößen der betreffenden geschlossenen Strahlflächen führen. So besagt

$$g' - g = \oint \omega_0 = 2\pi\mu \quad (36)$$

einmal, daß die *Differenz der geodätischen Gesamtkrümmungen der sphärischen Bildkurven der Achsenflächen gleich der Gesamtdrehung unseres Bewegungsvorganges ist.*

Andererseits gilt: Die Öffnungswinkel der beiden Achsenflächen unterscheiden sich gerade um die Gesamtdrehung von B .

Die Dualteile von (10) ergeben die Beziehung

$$\bar{g}' - \bar{g} = \oint \bar{\omega}_0. \quad (37)$$

Die Differenz der Öffnungsstrecken der beiden Achsenflächen ist somit gleich der Gesamtschiebstrecke unseres geschlossenen Bewegungsvorgangs. Wegen (17) können wir für letztere auch

$$\oint \bar{\omega}_0 = \oint k \omega_0 \quad (38)$$

schreiben.

Die Aufspaltung von (12) liefert als Realteil für den Öffnungswinkel einer Bahnfläche oder für die geodätische Gesamtkrümmung der sphärischen Bildkurve der Bahnfläche von $\mathfrak{X}$ den Ausdruck

$$g_{\mathfrak{X}} = (v \, \mathfrak{x}) + 2 \pi n_{\mathfrak{X}} = \sum v_i x_i + 2 \pi n_{\mathfrak{X}}. \quad (39)$$

Hierbei ist $n_{\mathfrak{X}}$ wieder die Umlaufzahl des Richtkegels der beweglichen Achsenfläche um die Richtung $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{X}$ und gilt

$$2 \pi n_{\mathfrak{X}} = \oint d\tau. \quad (40)$$

Als Dualteil finden wir

$$\bar{g}_{\mathfrak{X}} = \sum (v_i \bar{x}_i + \bar{v}_i x_i) + \oint d\bar{\tau}. \quad (41)$$

Auf der Einheitskugel war $\mathfrak{Z}$ die Bahntangente des in K befestigten dualen Punktes $\mathfrak{X}$ bei dem zugrunde gelegten Drehvorgang D . Da die Bahntangente $\mathfrak{Z}$ nicht nur auf $\mathfrak{X}$, sondern auch auf dem jeweiligen Polstrahl senkrecht steht, gilt

$$(\mathfrak{Z} \, \mathfrak{X}) = 0, \quad (\mathfrak{Z} \, \mathfrak{P}) = 0. \quad (42)$$

Im Linienraum durchläuft somit der Strahl $\mathfrak{Z}$ ein *gerades Konoid*, falls wir den Standpunkt des Beobachters in den Gangraum R verlegen. Dieses Konoid besteht aus den sämtlichen normalen Treffgeraden der in R festen Leitlinie $\mathfrak{X}$ und der einzelnen Erzeugenden der Achsenfläche $\mathfrak{P}(t)$. Es mißt daher $d\tau$ den Winkel, $d\bar{\tau}$ die Entfernung (Normalabstand) benachbarter Erzeugenden dieses Konoides. Da unser Bewegungsvorgang geschlossen ist, gilt gleiches von den Achsenflächen, aber auch von dem geraden Konoid in R , denn die Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}$, also die Fußpunkte obiger Gemeinlote $\mathfrak{Z}$ bilden auf der Achsenfläche eine geschlossene Kurve³. Daher ist

$$\oint d\bar{\tau} = 0 \quad (43)$$

³ Es sei keine der Erzeugenden $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{X}$ parallel!

und vereinfacht sich der Ausdruck (41) für die *Öffnungsstrecke* der *Bahnfläche*

$$\bar{g}_x = \Sigma (v_i \bar{x}_i + \bar{v}_i x_i). \quad (44)$$

W. Blaschke berechnete direkt diesen Ausdruck und deutete ihn als Moment der Geraden $\mathfrak{X}$ um die Schraube $\mathfrak{F}$. Diese auch von G. Koenigs benutzte Schraube ist durch die sechs Integrale bestimmt

$$\begin{aligned} v_i &= \oint \omega_i = k_{0i}, \quad \bar{v}_i = \oint \bar{\omega}_i = k_{jk} \\ (i, j, k &= 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2) \end{aligned} \quad (45)$$

Die *Study'sche* Übertragung liefert somit unmittelbar aus (12) die Formel (44).

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den geschlossenen Drehvorgang auf der Kugel, dessen Polbahnen Kreise mit rationalem Umfangverhältnis sind; die Bahnkurven sind dann sphärische Radlinien. Bei geeigneter Wahl der Achsenkreuze können wir für die Polbahnen setzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{P} &= e_1 \sin P \cos nt + e_2 \sin P \sin nt + e_3 \cos P \\ \mathfrak{P}' &= e_1' \sin P' \cos n't + e_2' \sin P' \sin n't + e_3' \cos P' \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

P, P' sind die sphärischen Radien; sie erfüllen die Bedingung

$$n \sin P = n' \sin P'. \quad (47)$$

Die Zahlen n, n' seien ganz und relativ prim.

Die beiden Achsenkreuze sind durch $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}', \dot{\mathfrak{P}} = \dot{\mathfrak{P}}'$ aufeinander bezogen, was

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= n' \sin (P - P') \cos nt \, dt \\ \Omega_2 &= n' \sin (P - P') \sin nt \, dt \\ \Omega_3 &= [-n + n' \cos (P - P')] \, dt \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

und somit

$$\Omega_0 = (n' \cos P' - n \cos P) \, dt \quad (49)$$

zur Folge hat. Wir finden für die geodätischen Kontingenzwinkel

$$\Gamma = n \cos P \, dt, \quad \Gamma' = n' \cos P' \, dt \quad (50)$$

und daher für die Gesamtkrümmungen

$$G = 2\pi n \cos P, \quad G' = 2\pi n' \cos P'. \quad (51)$$

Die Übertragung in den Linienraum — es werden hierzu nur $P = \varrho + \varepsilon \bar{\varrho}$ und $P' = \varrho' + \varepsilon \bar{\varrho}'$ als duale Zahlen aufgefaßt — führt die beiden aufeinander rollenden Polkreise in zwei Drehhyperboloide über, die aufeinander schroten. Ihre Gleichungen sind

$$\left(\frac{z_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{a}\right)^2 - \left(\frac{z_3}{b}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{z_1'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{z_2'}{a'}\right)^2 - \left(\frac{z_3'}{b'}\right)^2 = 1, \quad (52)$$

wobei

$$a = \bar{\varrho}, \quad a' = \bar{\varrho}', \quad b = b' = \bar{\varrho} \operatorname{ctg} \varrho = \bar{\varrho}' \operatorname{ctg} \varrho \quad (53)$$

gilt. — Die letzte Gleichung besagt die Übereinstimmung des Dralls der beiden Hyperboloide. Der Öffnungswinkel eines solchen ist

$$\lambda = 2 \pi n \cos \varrho = \frac{2 \pi n b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (54)$$

die Öffnungsstrecke

$$l = -2 \pi n \bar{\varrho} \sin \varrho = \frac{-2 \pi n a^2}{\sqrt{a^2 + b'^2}}. \quad (55)$$

Die Gesamtdrehung, wie die Gesamtschiebung unseres räumlichen Bewegungsvorganges kann nun nach (36), (37) leicht gefunden werden. Die Formeln (51), (54), (55) sind auf die Periode des geschlossenen Dreh-, bzw. Bewegungsvorgangs bezogen; für die geschlossenen Polbahnen oder Achsenflächen allein wäre sonst noch durch n , bzw. n' zu dividieren.

Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktionen an ebenen Kurven mittels Deutung eines Kurvenparameters.

Von

Franz Wrtilek, Wien.

Mit 5 Abbildungen.

(Eingelangt am 2. Januar 1951.)

I. Einleitung.

Durch eine Parameterdarstellung einer ebenen Kurve c , $x = x(u)$, $y = y(u)$, werden den Punkten von c ein-eindeutig die u -Werte eines u -Intervalls zugeordnet. c wird dadurch eine „bezahlte“ oder „kotierte“ Kurve $c(u)$. Faßt man die Kurvenebene als Grundrißebene Π auf, so ist jeder Kurvenpunkt $P(u)$ der Grundriß eines Raumpunktes $P^r(u)$ mit der Höhenkote u , und $c(u)$ ist der kotierte Grundriß einer Raumkurve $c^r(u)$. Konstruiert man c in Π punktweise, indem man entsprechende Kurvenpaare zweier Systeme von Konstruktionslinien zum Schnitt bringt, so kann die Kotierung von c auf diese Konstruktionslinien übertragen werden. Dient etwa zur Konstruktion von c ein stetiges System $\mathfrak{S}$ von Geraden g , die eineindeutig den Punkten $P(u)$ von c zugeordnet sind, so wird dadurch $\mathfrak{S}$ zu einem System von bezahlten Geraden $g(u)$, das sich als kotiierter Grundriß der zu Π parallelen Erzeugenden $g^r(u)$ einer Strahlfläche $\mathfrak{S}^r$ auffassen läßt. Analog entsteht aus einem stetigen System $\mathfrak{K}$ von Kreisen k , die eineindeutig den Punkten $P(u)$ von c zugeordnet sind, ein System von bezahlten Kreisen $k(u)$, das als kotiierter Grundriß der zu π parallelen Schichtenkreise $k^r(u)$ einer zyklischen Fläche $\mathfrak{K}^r$ gedeutet werden kann. Allgemein erhält man durch Kotierung der beiden Scharen von Konstruktionslinien für die Kurve c in Π zwei nach den Werten von u bezahlte Kurvenscharen, die als Grundrisse der Schichtenlinien zweier Flächen Φ , Ψ aufgefaßt werden können. Die Schnittkurve von Φ und Ψ ist die der ebenen Kurve $c(u)$ zugeordnete Raumkurve $c^r(u)$.

Ermittelt man die Tangente in einem Punkt $P^r(u)$ von $c^r(u)$ als Schnittlinie der Tangentialebenen an Φ und Ψ in $P^r(u)$, so läßt sich durch entsprechende Deutung der Konstruktionslinien im Grundriß eine planimetrische Tangentenkonstruktion für $c(u)$ in $P(u)$ gewinnen. Aus der Konstruktionsvorschrift für c kann also auf dem Wege über die zugehörige Raumkurve c^r eine Tangentenkonstruktion für die ebene Kurve c abgeleitet werden¹. Die Kurve $c^r(u)$ läßt sich auch zur Ermittlung der Krümmungskreise von $c(u)$ verwenden, indem man das System der nach u bezifferten Normalen $n(u)$ von $c(u)$ als kotierten Grundriß des Strahlsystems aller zu Π parallelen Normalen von $c^r(u)$ deutet. Die Strahlfläche Θ dieser Geraden $n^r(u)$ ist die *Planierungsfläche*² der Raumkurve $c^r(u)$. Der scheinbare Umriß von Θ auf Π , für die zu Π normale Sehstrahlenrichtung, ist die Hüllkurve aller Normalen von $c(u)$, also die Evolute von $c(u)$. Als Anwendungsbeispiel soll im folgenden (Abschnitt II) die Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktion einer Parabel gezeigt werden.

Eine andere nützliche Deutung des Parameters u besteht darin, ihn als Zeit aufzufassen. $P(u)$ bedeutet dann, daß ein die Kurve $c(u)$ beschreibender Punkt P sich im Zeitpunkt u in $P(u)$ befindet. Durch die aufeinanderfolgenden Differentiationen nach u können der Kurve $c(u)$ neue Kurven, ihre *Ableitungskurven*, zugeordnet werden. Trägt man von den Punkten $P(u)$ aus auf den Tangenten von $c(u)$ die zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren ab, dann erfüllen ihre Endpunkte eine Kurve $\dot{c}(u)$, die als *erste abgeleitete Kurve von $c(u)$* bezeichnet werden möge. In der technischen Kinematik wird die so definierte Kurve $\dot{c}(u)$ der *lokale Hodograph* von $c(u)$ genannt³. Analog möge der lokale Hodograph von $\dot{c}(u)$ als *zweite abgeleitete Kurve von $c(u)$* eingeführt werden usw. Der Kurve $c(u)$ und ihren abgeleiteten Kurven lassen sich durch die erste Deutung von u als Höhenkote wieder Raumkurven zuordnen. In den Abschnitten III bis V der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß die so gewonnenen Raumfiguren ebenfalls eine lohnende Verwertung zur Ermittlung der Krümmungskreise von

¹ Die Grundidee, die Tangentenkonstruktion einer ebenen Kurve aus ihren Konstruktionslinien abzuleiten, geht auf *G. Persone*, gen. *Roberval* (1602–1675) zurück. Vgl. *Duhamel*, Sur la méthode des tangentes de Roberval, Mém. des sav. étrangers 5, 1834. — *R. Beyer*, Techn. Kinematik, Leipzig 1931, S. 171.

² Vgl. *E. Müller-E. Kruppa*, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 5. Aufl., Wien 1948, S. 90.

³ *R. Beyer*, a. a. O., S. 61 und S. 184.

$c(u)$ gestatten. Die erste Methode zur Ermittlung der Krümmungskreise einer kotierten Kurve $c(u)$ beruht also auf der Umrißbestimmung der Planierungsfläche ihrer zugeordneten Raumkurve $c''(u)$. Ein zweites Verfahren läßt sich mittels der räumlich gedeuteten Ableitungskurven entwickeln.

Da bei beiden Methoden öfters die Aufgabe auftritt, die Berührebene in einem Punkt einer Strahlfläche zu konstruieren, deren Erzeugende zur Zeichenebene parallel sind, möge ihre Konstruktion in Abb. 1 ein für allemal besprochen werden.

Es wird angenommen, daß die Berührebenen α und β der Punkte A und B der Erzeugenden $e(//II)$ bekannt sind; a und $b(//e)$ seien ihre Spuren in II oder in einer zu II parallelen Ebene. Nach einem allgemeinen Satz aus der Theorie der Strahlfläche ist die Punktreihe $(A, B, C, D, \dots)$ von e projektiv zum Ebenenbüschel $e(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots)$ der zugehörigen Tangentialebenen (Satz von der Chasles'schen Berührungskorrelation)⁴. Sind c und d die C, D entsprechenden Tangentialspuren, dann gilt im Grundriß die Doppelverhältnisgleichheit

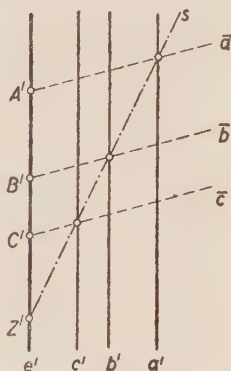


Abb. 1.

$$(A' B' C' D') = (a' b' c' d'). \quad (1)$$

Bei der vorliegenden konoidalen Fläche mit der Richtebene II entspricht dem Fernpunkt D_∞ von e die Ferngerade d_∞ von II als Spur der zugehörigen Tangentialebene (asymptotische Ebene). Daher reduziert sich (1) auf die Teilverhältnisgleichheit

$$(A' B' C') = (a' b' c'). \quad (2)$$

Legt man also durch $A', B', \dots$ ein beliebiges Parallelstrahlbüschel $\bar{a}, \bar{b}, \dots$, dann schneiden entsprechende Strahlen der beiden Büschel einander auf einer Perspektivitätsachse s , mit deren Hilfe die Berührungskorrelation längs e vervollständigt werden kann. Insbesondere entspricht der zu II normalen Ebene durch e (Zentralebene) mit der Spur e' der Berührungspunkt Z (Zentralpunkt), dessen Grundriß der Schnittpunkt $Z' = [e' s]$ ist.

⁴ *M. Chasles*, Corr. math. XI (Quetelet) 1839, no 4. Im wesentlichen war dieser Satz bereits *J. N. P. Hachette* bekannt. *Traité de géométrie descr.*, 2. Aufl., 1828, p. 95.

II. Krümmungskreise der Parabel.

Abb. 2 zeigt die Konstruktion einer Parabel $c(u)$ aus der Leitlinie l und dem Brennpunkt F . Hierzu wurden die Parallelen zu l im Abstand u ($u = 0, 1, 2, \dots$) mit den Kreisen um F vom Radius u geschnitten.

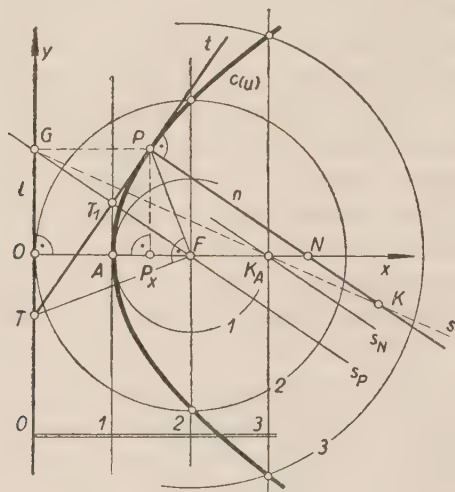


Abb. 2.

Als Einheit wurde der halbe Parameter $p/2$ gewählt. Deutet man u gemäß I als Höhenkote, so stellen diese Konstruktionslinien die Schichtenlinien einer Ebene Φ mit der Spur $l(0)$ und der Böschung $1:1$, sowie eines Drehkegels Ψ gleicher Böschung mit der Spitze $F(0)$ dar. Die c entsprechende Raumkurve c^r ist also ebenfalls eine Parabel. Um die Tangente t^r in einem Punkt P^r zu erhalten, hat man die Tangentialebene von Ψ längs der Erzeugenden $[FP^r]$ mit der Ebene Φ zu schneiden. Die Normale in F zu $[FP]$ ist die Spur dieser Tangentialebene und trifft l im Spurpunkt T der Tangente t^r . Somit ist $t = [TP]$ die Tangente von c in P .

Zur Untersuchung der Planierungsfläche Θ von c^r möge ein rechtwinkliges Achsenkreuz $O(x, y, z)$ mit der Parabelachse als x -Achse und der Leitlinie l als y -Achse zugrundegelegt werden. Ist P_x die Projektion von P auf x , so durchlaufen die Raumpunkte P_x^r in der Ebene Φ die Fallinie f^r ($x = u, y = 0, z = u$). Da die Subnormale $P_x N$ einer Parabel gleich dem Parameter p ist, beschreiben die Raumpunkte N^r die Gerade f_1^r ($x = u + p, y = 0, z = u$). Diese Gerade f_1^r , in der Θ

die xz -Ebene schneidet, ist also die Parallele durch F zur Fallinie f' . Die Erzeugenden von Θ verbinden die Punkte der Parabel c' mit den gleichhohen Punkten von f'_1 , und zwar gehen für $u > 1$ durch jeden Punkt von f'_1 zwei Erzeugende. Sie fallen für $u = 1$, d. h. für den Scheitel A^r der Parabel c' zusammen, so daß der mit A^r in gleicher Höhe liegende Punkt K'_A auf f'_1 Kuspidalpunkt von Θ ist. Sein Grundriß K_A ist daher die Krümmungsmitte des Scheitels A der Parabel c , und es ist $AF = FK_A$.

Der scheinbare Umriß von Θ auf Π ist nach I die Evolute von c . Bestimmt man also für die lotrechte Ebene durch n^r den zugehörigen Berührungspunkt K^r (Zentralpunkt), dann ist sein Grundriß K der P entsprechende Krümmungsmittelpunkt von c . K läßt sich demnach (Abb. 2) nach dem in I, Abb. 1 erläuterten Verfahren leicht ermitteln, wobei jetzt die Zeichenebene in die Schichtenebene Π_1 (1) verlegt werden möge. Ist T_1 der Schnittpunkt der Parabeltangente t mit der Scheiteltangente, so ist $[T_1 F] = s_P$ die Spur der Berührebene der Planierungsfläche Θ in P^r . Ihre Berührebene in N^r wird von der Erzeugenden n^r und von f'_1 aufgespannt. Die Spur s_N dieser Berührebene geht daher durch K_A und ist zu n parallel. Wählt man nun als die Richtung der in Abb. 1 mit $\bar{a}$, $\bar{b}$ bezeichneten Parallelen die Richtung der x -Achse, so ergibt sich als Perspektivitätsachse die Gerade $s = [GK_A]$, wenn G den zu t gehörigen Gegenpunkt auf der Leitlinie bedeutet. Der Schnittpunkt $K = [sn]$ ist dann die gesuchte Krümmungsmitte. Somit gilt der bisher scheinbar nicht bekannte

Satz 1: Die einem Parabelpunkt P entsprechende Krümmungsmitte K liegt auf der Verbindungsgeraden des Gegenpunktes G von P mit der Krümmungsmitte des Parabelscheitels.

III. Die abgeleiteten Kurven.

In Abb. 3 sei $c(u)$ eine in der Zeichenebene Π liegende und jetzt nach den Werten der Zeit u bezifferte ebene Kurve. Trägt man über jedem Punkt $P(u)$ von $c(u)$ den Wert von u als Höhe über Π auf, dann erhält man die zugeordnete Raumkurve $c^r(u)$.⁵ Wir nehmen nun vorüber-

⁵ Ist bereits $c(u)$ eine Raumkurve, dann entspricht ihr eine Kurve $c^r(u)$ des vierdimensionalen Raumes, die nach H. Minkowski eine Weltlinie genannt wird (Ges. Abh., Bd. II, XXXII, Raum und Zeit, S. 432). Die obige Kurve $c^r(u)$ ist ein Sonderfall einer solchen Weltlinie, bei dem $c(u)$ eben ist. Auf die Verwertbarkeit dieser speziellen Weltlinie, insbesondere zur Lösung von Bewegungsaufgaben, hat W. Wunderlich hingewiesen. (Über fünf Aufgaben der Seetaktik, Zeitschr. f. math. u. nat. Unterricht LXXII, Heft 4, S. 97—102).

gehend an, ein die Kurve $c(u)$ beschreibender Punkt P möge sich von der Stelle $P = P(u)$ an in Richtung der Tangente $t(u)$ geradlinig mit

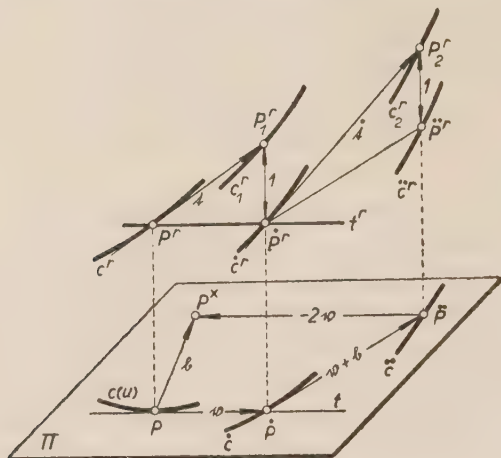


Abb. 3.

der in $P(u)$ erreichten Momentangeschwindigkeit $v(u)$ weiterbewegen. Nach Ablauf einer Zeiteinheit wäre $P(u)$ dann im Endpunkt $\dot{P}(u)$ des von $P(u)$ ausgehenden Geschwindigkeitsvektors $v(u)$ angelangt. Trägt man über allen Punkten der Strecke $P\dot{P}$ wieder die u -Werte als Höhen auf, dann entspricht der orientierten Strecke $v(u) = \overrightarrow{P\dot{P}}$ in Π ein orientiertes Tangentenstück $t = \overrightarrow{P^r P_1^r}$ der Raumkurve $c^r(u)$, dessen Endpunkt P_1^r um eine Höheneinheit oberhalb P^r liegt. t soll der *Tangentenpfeil von c^r in P^r* genannt werden. Dann gilt der

Satz 2: Der Grundriß des Tangentenpfeiles $t(u)$ der Raumkurve $c^r(u)$ in $P^r(u)$ ist der Geschwindigkeitsvektor $v(u)$ von $c(u)$ in $P(u)$. Umgekehrt kann jeder Geschwindigkeitsvektor von $c(u)$ als Grundriß eines Tangentenpfeiles von $c^r(u)$ gedeutet werden.

Da die Aufsuchung des Geschwindigkeitsvektors auf analytischem Wege eine einmalige Differentiation nach u erfordert, soll der Endpunkt $\dot{P}(u)$ des von $P(u)$ ausgehenden Vektors $v(u)$ der *erste abgeleitete Punkt von $P(u)$* genannt werden. Dementsprechend soll die Ortskurve aller $\dot{P}(u)$ bei variablem u , also der lokale Hodograph von $c(u)$ (vgl. I), die *erste abgeleitete Kurve $\dot{c}(u)$ von $c(u)$* heißen. Bezeichnet man die Kurve, auf der die Endpunkte $P_1^r(u)$ aller Tangentenpfeile von $c^r(u)$ liegen, mit $c_1^r(u)$, dann ist $\dot{c}(u)$ nach Satz 2 der Grundriß von $c_1^r(u)$.

Auch $\dot{c}(u)$ ist eine nach u bezifferte Kurve. Ihre zugeordnete Raumkurve $\dot{c}^r(u)$ ergibt sich aus $c_1^r(u)$ durch eine Abwärtsschiebung um eine Höheneinheit in Richtung der zu Π normalen Sehstrahlen.

Der Satz 2 beinhaltet die Möglichkeit, den Ableitungsprozeß auf synthetischem Wege durchzuführen. Dies geschieht durch folgende *Ableitungskonstruktion*. Für die ebene Kurve $c(u)$ sei die Bezifferung nach u bekannt; ferner seien zwei Scharen von Konstruktionslinien gegeben, die die punktweise Konstruktion von $c(u)$ gestatten. Überträgt man die Bezifferung auf die Konstruktionslinien, dann können sie als die Grundrisse der Schichtenlinien zweier Flächen Φ, Ψ gedeutet werden, deren Schnittkurve die Raumkurve $c^r(u)$ ist (vgl. I). Um den Endpunkt P_1^r des von P^r ausgehenden Tangentenpfeiles t (Abb. 3) zu erhalten, bringt man die Spuren f_1^r, g_1^r der beiden Tangentialebenen in P^r an Φ und Ψ auf der um eins oberhalb P^r liegenden Schichtenebene zum Schnitt. Ihre Grundrisse $f(u), g(u)$ schneiden einander im ersten abgeleiteten Punkt $\dot{P}(u)$ von $P(u)$. Trägt man wieder u als Höhe über π auf, dann erhält man die zugeordneten Raumgeraden $f^r(u), g^r(u)$ von $f(u), g(u)$. Sie liegen um eine Höheneinheit unterhalb $f_1^r(u), g_1^r(u)$. Bei variablem u beschreiben $f^r(u)$ und $g^r(u)$ zwei Strahlflächen $\dot{\Phi}$ und $\dot{\Psi}$, deren Schnittkurve die der ersten abgeleiteten Kurve $\dot{c}(u)$ zugeordnete Raumkurve ist. *Aus den Konstruktionslinien für die ebene Kurve $c(u)$ lassen sich auf dem Wege über die Flächen Φ, Ψ und $\dot{\Phi}, \dot{\Psi}$ demnach die Konstruktionslinien $f(u), g(u)$ für die abgeleitete Kurve $\dot{c}(u)$ gewinnen.* Das hier entwickelte Verfahren gehört also zu jenen Konstruktionen, die als „geometrische Differentiation“ oder „Ableitungskonstruktion“ bezeichnet werden⁶.

Es ist leicht einzusehen, wie die höheren abgeleiteten Kurven gewonnen werden können. Die Endpunkte $P_2^r(u)$ der Tangentenpfeile $\dot{t}(u)$ der $\dot{c}(u)$ zugeordneten Raumkurve $\dot{c}^r(u)$ erfüllen eine Kurve $c_2^r(u)$, deren Grundriß die *zweite abgeleitete Kurve* $\ddot{c}(u)$ von $c(u)$ heißen

⁶ Das Wesentliche darüber enthält eine Abhandlung von R. v. Mises: Zur konstruktiven Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Bd. 52/1905, S. 44—85. Weitere hierher gehörige Arbeiten sind: G. Peano, Applicazioni del calcolo infinitesimale, Torino 1887. — J. Petersen (Hjælmslev), Grundprinciper for den infinitesimale Descriptivgeometri med Anvendelse paa Laeren om variable Figurer. Inauguraldiss. Kjöb 1897. (Deutsche Besprechung im Jahrb. über d. Fortschritte d. Math., Bd. 42/1897, S. 505f.). — A. Kanda, Beiträge zur reinen Differentialgeometrie, Monatsh. f. Math. u. Phys., XXIV/1913, S. 33—64.

möge. $\ddot{c}$ ist der lokale Hodograph von $\dot{c}$. Die $\ddot{c}$ zugeordnete Raumkurve $\ddot{c}^r$ entsteht aus $\dot{c}^r$ durch Abwärtsschiebung um eine Höheneinheit. Die Bedeutung von $\ddot{c}(u)$, bzw. des zweiten abgeleiteten Punktes $\ddot{P}(u)$ von $c(u)$, d. h. des Grundrisses von $P_2^r(u)$, soll nun analytisch untersucht werden. Hierzu sei die Parameterdarstellung von $c(u)$ als bekannt vorausgesetzt:

$$c(u): \quad x = x(u), \quad y = y(u). \quad (3)$$

Die Kurven c^r , $\dot{c}$ und $\ddot{c}^r$ haben dann folgende Parameterdarstellungen:

$$c^r(u): \quad x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = u, \quad (4)$$

$$\dot{c}(u): \quad x = x(u) + \dot{x}(u), \quad y = y(u) + \dot{y}(u), \quad (5)$$

$$\ddot{c}^r(u): \quad x = x(u) + \dot{x}(u), \quad y = y(u) + \dot{y}(u), \quad z = u. \quad (6)$$

Die Koordinaten des Tangentenpfeiles $\dot{t} = \overrightarrow{P^r P_2^r}$ der Kurve $\ddot{c}^r$ erhält man durch Differentiation von (6) nach u :

$$\dot{t} = (\dot{x}(u) + \ddot{x}(u), \dot{y}(u) + \ddot{y}(u), 1). \quad (7)$$

Aus (5), (6), (7) folgt dann leicht der

Satz 3: Der Grundriß $\overrightarrow{P\dot{P}}$ des Tangentenpfeiles $\dot{t}$ der Raumkurve $\ddot{c}$ ist gleich der vektoriellen Summe aus dem Geschwindigkeitsvektor v und dem Beschleunigungsvektor b von $c(u)$ in $P(u)$.

Macht man also (Abb. 3) im Grundriß $\overrightarrow{P\dot{P}^\times} = -2v$, so ist $\overrightarrow{P\dot{P}^\times}$ der Beschleunigungsvektor b in $P(u)$.

IV. Die Krümmungskreise einer kotierten Kurve.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie aus dem Kurvenpunkt P und seinen beiden abgeleiteten Punkten $\dot{P}$, $\ddot{P}$ (Abb. 4) der Krümmungskreis für die ebene Kurve c in P konstruiert werden kann. Hierzu sei zunächst die Krümmungskreisconstruction von *Nikolaides*⁷ als bekannt vorausgesetzt. Sie lautet: „Trägt man auf sämtlichen Tangenten t einer ebenen Kurve c von den Berührungspunkten P aus eine konstante Strecke l ab, so bilden die Endpunkte Q dieser Strecken eine Äquitangentialkurve q von c ; entsprechende Normalen n und n_q von c in P und q in Q schneiden einander in der Krümmungsmitte K von P .“

⁷ Nouv. Ann. Math. (2) 5 (1866), S. 383. Vgl. auch E. Müller-E. Kruppa, Lehrb. der darst. Geom., Wien 1948, 5. Aufl., S. 32.

Diese Konstruktion wird meist als Näherungskonstruktion angewendet, indem man die Tangente t_q in Q durch Anlegen ermittelt. Durch räumliche Deutung von q soll hier t_q und damit n_q exakt konstruiert werden.

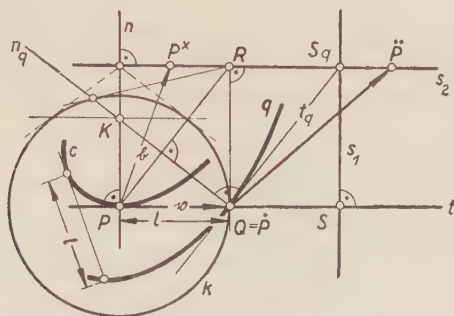


Abb. 4.

In Abb. 4 wurde l so gewählt, daß die Äquitangentialeurve q durch den ersten abgeleiteten Punkt $\dot{P}$ desjenigen Punktes P geht, für den die Krümmungsmitte K konstruiert werden soll. An dieser einen Stelle ist also $Q = \dot{P}$. Nun mögen die Tangenten $t(u)$ von $c(u)$ und die Kreise $k(u) = (P; l)$ wieder räumlich gedeutet werden. Die Geraden $t(u)$ sind dann die Grundrisse der horizontalen Erzeugenden $t^r(u) = [P^r \dot{P}^r]$ (vgl. Abb. 3) einer Strahlfläche Γ . Diese ist durch die Leitkurven $c^r, \dot{c}^r$ und die Richtebene Π bestimmt. Den Kreisen $k(u)$ entspricht eine zyklische Schiebfläche Σ mit zu Π parallelen Schichtenkreisen $k^r(u)$ von konstantem Radius l . Die Mitten dieser Kreise liegen auf der Mittenkurve c^r . Der Äquitangentialeurve q ist im Raum die Schnittkurve $q^r = [\Gamma \Sigma]$ zugeordnet. Die Tangente an diese Kurve soll nun als Schnittgerade der Tangentialebenen in Q^r an Γ und Σ ermittelt werden. Da Σ aus $k^r(u)$ durch die krumme Schiebung längs c^r entsteht, enthält Σ die Kurve s^r , die aus c^r durch die Parallelverschiebung mit der Schieb-
strecke $\overrightarrow{PQ}$ entsteht. Durch diese geht der Tangentenpfeil $\overrightarrow{P^r P_1^r}$ in den Tangentenpfeil $\overrightarrow{Q^r S_1^r}$ von s^r in Q^r über. Sein Grundriß ist somit $QS = PQ$ auf t . Γ geht durch $\dot{c}^r$ mit dem Tangentenpfeil $\overrightarrow{t}$, dessen Grundriß $\overrightarrow{P\dot{P}}$ ist. Legt man nun in Π die Normale s_1 zu t durch S und die Parallele s_2 zu t durch $\dot{P}$, so sind s_1, s_2 die Grundrisse der Spuren s_1^r, s_2^r der Berührebenen im Punkt Q^r der Flächen Σ , bzw. Γ in der zu Π parallelen

Ebene, die um eine Höheneinheit oberhalb P^r liegt. Die beiden Berührebenen schneiden sich in der gesuchten Tangente der der Äquitangentialkurve q zugeordneten Raumkurve q^r . Der Tangentenpfeil von q^r in Q^r verbindet Q^r mit dem Schnittpunkt $[s_1^r s_2^r]$; sein Grundriß ist $Q S_q$, wenn $S_q = [s_1 s_2]$ ist. Macht man auf s_2 die Strecke $\overrightarrow{S_q R} = \overrightarrow{S Q}$, so ist $[P R] \parallel [Q S_q]$ und daher normal zu n_q . Also ist n_q die Polare von R in bezug auf k und somit der Krümmungsmittelpunkt $K = [nn_q]$ der Pol von s_2 bezüglich k . Es gilt daher der

Satz 4: Ist $P(u)$ ein beliebiger Punkt der kotierten Kurve $c(u)$, und sind $\dot{P}(u)$, $\ddot{P}(u)$ die zugehörigen abgeleiteten Punkte, so ist die Krümmungsmitte K von c in P der Pol der Parallelen s_2 durch $\ddot{P}$ zur Tangente $t = [P \dot{P}]$ bezüglich des Kreises k mit der Mitte P und dem Radius $P\dot{P}$.⁸

Im folgenden wird eine Anwendung für III und IV gegeben.

V. Die Krümmungskreise der Rastpolbahn einer Schubkurbelbewegung.

Die konstante Strecke AB (Abb. 5) möge sich so bewegen, daß A den Kreis $a = (O; r)$ mit konstanter Geschwindigkeit $v = A\dot{A}$ durchläuft, während B auf der Geraden b gleitet. Eine derartige Bewegung wird als Schubkurbelbewegung bezeichnet. Aus der ebenen Kinematik ist bekannt:

„In jedem Zeitpunkt gehen die Normalen sämtlicher Bahnkurven einer ebenen Bewegung durch einen festen Punkt P , den zu diesem Zeitpunkt gehörigen Momentanpol. Eine Bewegung der Ebene in sich kann in jedem Zeitpunkt durch eine Momentandrehung um den Momentanpol P ersetzt werden, wobei die Geschwindigkeiten sämtlicher Punkte ihren Entfernungen von P proportional sind.“ Demnach erhält man den zu einer bestimmten Lage von AB gehörigen Momentanpol P als Schnittpunkt von $e = [OA]$ mit der Normalen f in B zu b . Ferner ergibt sich der Geschwindigkeitsvektor $\overrightarrow{B\dot{B}}$ aus $\overrightarrow{A\dot{A}}$, indem man $\triangle P B \dot{B} \sim \triangle P A \dot{A}$ macht. Daraus folgt, daß man $\dot{B}$ auch wie folgt erhalten kann: $\dot{A}$ wird um A durch -90° nach V auf e gedreht; die

⁸ Zu ähnlichen Konstruktionen gelangten bereits *R. v. Mises* (a. a. O., S. 68, Fig. 13) und *A. Kanda* (a. a. O., S. 44, Fig. 8). Ein Dreieck wie $P\dot{P}P^\times$ in den obigen Figuren 3 und 4 nennt *A. Kanda* ein Krümmungsdreieck. Die in Satz 4 festgelegte Konstruktion wurde erstmalig von *R. Bereis* auf rechnerischem Wege gefunden. (Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen; erscheint demnächst im Österr. Ing. Archiv.)

Parallele zu $[A B]$ durch V wird mit f in W geschnitten; hierauf dreht man W um B durch $+90^\circ$ nach $\dot{B}$.⁹

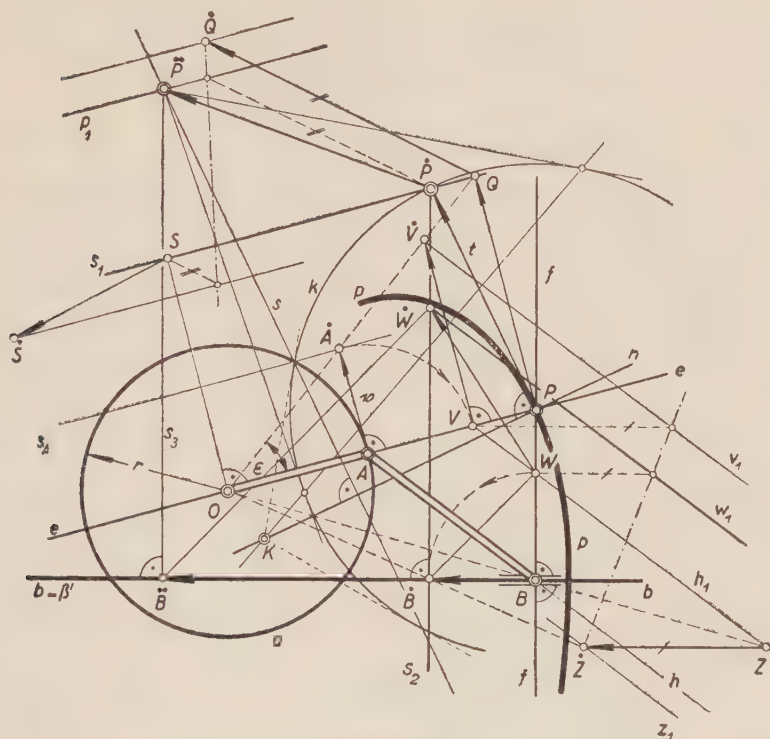


Abb. 5.

Für die Ortskurve p aller Momentanpole P , die sogenannte Rastpolbahn der Bewegung, soll nun die Tangente in P und der Krümmungsmittelpunkt K konstruiert werden. Hierzu betrachten wir wieder die den kotierten Bahnkurven $a(u)$ und $b(u)$ zugeordneten Raumkurven $a^r(u)$, $b^r(u)$. Die Raumkurve $a^r(u)$ ist nach der obigen Annahme von $\vec{v} = A\dot{A} = \text{const.}$ eine Schraublinie. $b^r(u)$ ist die Schnittkurve der projizierenden Ebene β durch b mit der zyklischen Schiebfläche Σ , deren zu II parallele Schichtenkreise den konstanten Radius AB haben und deren Mittelpunkte A^r die Kurve $a^r(u)$ durchlaufen. Den radial verlaufenden Geraden $e(u)$ entsprechen im Raum die Erzeugenden

⁹ Vgl. etwa R. Beyer, a. a. O., S. 188.

$e^r(u)$ einer Wendelfläche Φ durch a^r , deren Achse die Normale o zu II in O ist. Endlich entsprechen den zu $b(u)$ normalen Geraden $f(u)=[BP]$ im Raum die Erzeugenden $f^r(u)$ eines Zylinders Ψ mit der Basiskurve $b^r(u)$. Die der Rastpolbahn $p(u)$ zugeordnete Raumkurve $p^r(u)$ ist dann die Schnittkurve der Wendelfläche Φ mit dem Zylinder Ψ . Der Tangentenpfeil von p^r in P^r soll nun ermittelt werden.

Hiezu sei daran erinnert, daß nach III, Satz 2, die Geschwindigkeitsvektoren $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ als Grundrisse der Tangentenpfeile von a^r, b^r in A^r, B^r angesehen werden können. Wählt man also die Bildebene II derart, daß die Punkte A^r, B^r die Höhenkote $u = -1$ besitzen, dann fallen die Endpunkte A_1^r, B_1^r der Tangentenpfeile in die Ebene II hinein und mit den abgeleiteten Punkten $\dot{A}, \dot{B}$ zusammen. Die Berührungskorrelation der Wendelfläche Φ längs der Erzeugenden e^r ist durch O^r als Zentralpunkt und den Tangentenpfeil $\overrightarrow{A^r\dot{A}}$ bestimmt. Die Parallele s_A durch $\dot{A}$ zu e ist die Spur der Tangentialebene an Φ in A^r . Ermittelt man nun Q derart, daß die Dreiecke OPQ und $OA\dot{A}$ ähnlich sind, so ist die Parallele s_1 durch Q zu e die P^r entsprechende Tangentialspur, da durch diese Konstruktion die nach I, Fig. 1, erforderliche Teilverhältnisgleichheit $(OA/P) = (e/s_A s_1)$ erfüllt ist. Die Spur s_2 der Tangentialebene des Zylinders Ψ längs der Erzeugenden $f^r = [B^r P^r]$ ist die Parallele zu f durch $\dot{B}$. $\dot{P} = [s_1 s_2]$ ist dann der Endpunkt des von P^r ausgehenden Tangentenpfeiles von p^r und zugleich der erste abgeleitete Punkt von P . Somit ist $t = [P \dot{P}]$ die Tangente von p in P .

Nun soll die zu P gehörige Krümmungsmitte K von p ermittelt werden. Hiezu hat man nach III den zweiten abgeleiteten Punkt $\ddot{P}$ zu konstruieren, um dann IV, Satz 4, anwenden zu können. Zur Ermittlung von $\ddot{P}$ gehen wir von den Punkten $\dot{A}, \dot{B}, \dot{P}$ zu den Punkten $\dot{A}^r, \dot{B}^r, \dot{P}^r$ über, die die Höhe $u = -1$ besitzen und mit A^r, B^r, P^r in gleicher Höhe liegen. Den Spuren s_1, s_2 , als Konstruktionslinien für $\dot{P}$ aufgefaßt, entsprechen die um eine Höheneinheit tiefer liegenden Raumgeraden s_1^r, s_2^r , deren Schnittpunkt $\dot{P}^r$ ist. Die Gesamtheit aller Geraden $s_1^r(u)$ bildet bei variablem u eine Strahlfläche $\dot{\Phi}$; sämtliche $s_2^r(u)$ erfüllen einen Zylinder $\dot{\Psi}$. Die Schnittkurve $[\dot{\Phi} \dot{\Psi}]$ ist die der ersten abgeleiteten Kurve $\dot{p}(u)$ zugeordnete Raumkurve $\dot{p}^r(u)$, die Ortskurve aller Punkte $\dot{P}^r(u)$. Der Endpunkt des Tangentenpfeiles von $\dot{p}^r(u)$ in $\dot{P}^r$ ist bei

der getroffenen Wahl der Bildebene der gesuchte zweite abgeleitete Punkt $\ddot{P}$.

Um auf diesem Wege $\ddot{P}$ zu konstruieren, stellen wir die folgenden Überlegungen an. Die Gerade s_1 ist durch den früher verwendeten Punkt Q und die vierte Ecke S des Rechtecks $OPQS$ festgelegt; die Raumpunkte Q^r, S^r liegen in gleicher Höhe mit A^r, B^r, P^r . Da mit $\vec{v} = \vec{A\dot{A}}$ auch der Winkel $\varepsilon = \sphericalangle \dot{A}OA$ konstant bleibt, erhält man die Ortskurve q^r von Q^r aus p^r durch eine *achsiale Drehstreckung*¹⁰, um die Normale o in O zu Π mit dem konstanten Drehwinkel ε und dem konstanten Streckungsverhältnis $O^r P^r : O^r Q^r = \cos \varepsilon$. Ebenso ist $O^r P^r : O^r S^r = \cot \varepsilon$ konstant, und die Ortskurve s^r aller S^r entsteht aus p^r ebenfalls durch eine achsiale Drehstreckung um o . Diese Drehstreckungen führen den Tangentenpfeil $\vec{P^r\dot{P}}$ von p^r in die Tangentenpfeile $\vec{Q^r\dot{Q}}$ und $\vec{S^r\dot{S}}$ von q^r und s^r über, weshalb man im Grundriß $\triangle O P \dot{P} \sim \triangle O Q \dot{Q}$ und $\triangle O P \dot{P} \sim \triangle O S \dot{S}$ zu machen hat. Durch $\vec{Q^r\dot{Q}}$ und $\vec{S^r\dot{S}}$ ist die Berührungskorrelation von $\dot{\Phi}$ längs s_1^r festgelegt. Nach I, Fig. 1, erhält man die Spur p_1 der Tangentialebene von $\dot{\Phi}$ in $\dot{P}^r$ und damit einen ersten geometrischen Ort für $\ddot{P}$.

Nun ist noch die Tangentialebene des Zylinders $\dot{\Psi}$ in $\dot{P}^r$ zu ermitteln. Hiezu seien v^r, w^r die Ortskurven der Raumpunkte V^r, W^r , die den früher zur Konstruktion von $\dot{B}$ verwendeten Punkten V, W entsprechen. Die Strahlfläche A_1 der Geraden $h_1^r = [V^r W^r]$ entsteht aus der Strahlfläche A mit den Erzeugenden $h^r = [A^r B^r]$ durch achsiale Streckung aus o im konstanten Verhältnis $O^r A^r : O^r V^r = r : (r + v)$, wobei A^r in V^r und B^r in Z^r übergeht. Durch dieselbe Streckung erhält man aus $\vec{A^r\dot{A}}, \vec{B^r\dot{B}}$ die Tangentenpfeile $\vec{V^r\dot{V}}$ und $\vec{Z^r\dot{Z}}$. Letztere legen die Berührungskorrelation der Fläche A_1 längs h_1^r fest. Nach I, Fig. 1, erhält man die W^r entsprechende Tangentialspur w_1 . Der Punkt W^r liegt aber auch auf der durch B^r gehenden Erzeugenden l^r des Zylinders $\dot{\Psi}$. Schneidet man daher die Spur s_2 der Tangentialebene von $\dot{\Psi}$ längs l^r mit w_1 , so ist $\dot{W} = [s_2 w_1]$ der Tangentenspurpunkt von w^r in W^r . Die Basiskurve $\dot{b}^r$ des Zylinders $\dot{\Psi}$, mit den Erzeugenden s_2^r , entsteht

¹⁰ Diese windschiefen Affinitäten wurden von E. Müller achsiale Drehstreckungen genannt. (Die achsiale Inversion. Jahresber. der DMV, XXV/1916, S. 212.)

aus der Kurve w^r durch Projektion auf die Ebene β in Richtung der Drehsehnen $[W \dot{B}]$. Durch Projektion von $\dot{W}$ auf β in dieser Richtung ergibt sich demnach der Tangentenspurpunkt $\ddot{B}$ von $\dot{b}^r$ in $\dot{B}^r$. Die zu $\beta' = b$ normale Spur s_3 der Tangentialebene des Zylinders $\dot{\Psi}$ längs $\dot{j}^r = [\dot{B}^r \dot{P}^r]$ schneidet die früher gefundene Spur p_1 in dem Tangentenspurpunkt $\ddot{P}$ der Kurve $\dot{p}^r = [\dot{\Phi} \dot{\Psi}]$.

Nun kann die gesuchte Krümmungsmitte K nach IV, Satz 4, als Pol der Parallelen s durch $\ddot{P}$ zu $[P \dot{P}]$ bezüglich des Kreises $k = (P; P \dot{P})$ ermittelt werden¹¹.

¹¹ Aufgaben dieser Art löst man in der technischen Kinematik meist nach einem Verfahren von W. Hartmann (Die Maschinengetriebe, Stuttgart und Berlin 1913, 1. Bd., S. 79ff.) Der Aufstellung des Geschwindigkeitsplanes des Krümmungsstrahles einer Kurve c nach W. Hartmann (a. a. O., S. 80, Fig. 71) entspricht in der vorliegenden Arbeit die Festlegung der Berührungskorrelation der Planierungsfläche der Raumkurve c^r .

Ein anderes Verfahren zur Konstruktion der Krümmungsmitten kinematisch erzeugter Kurven hat A. Reuschel angegeben: Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen, Österr. Ing.-Archiv, Bd. III, Heft 1.

Über eine rekurrente Serie von relativ-zyklischen algebraischen Zahlkörpern.

Von

Peter Dénes, Budapest.

(Eingelangt am 23. Januar 1951.)

Es bezeichne l eine ungerade Primzahl, $\zeta = e^{2\pi i/l}$, $K_0 = k(\zeta)$ den Körper der l -ten Einheitswurzel, $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$.

Es wird die folgende Serie von relativ-zyklischen Körpern festgelegt. Ist M_0 eine Zahl in $k(\zeta)$, welche nicht die l -te Potenz einer anderen Zahl in $k(\zeta)$ ist, so entsteht durch Adjunktion der Wurzel $\sqrt[l]{M_0}$ zum $k(\zeta)$ ein Kummer'scher Zahlkörper $K_1 = k(\sqrt[l]{M_0}, \zeta)$. Es sei M_1 eine Zahl des Körpers K_1 , welche nicht die l -te Potenz einer Zahl in K_1 ist. Die Wurzel $\sqrt[l]{M_1}$ bestimmt mit K_1 einen Zahlkörper $K_2 = k(\sqrt[l]{M_1}, K_1)$. Wir können in dieser Weise aufeinanderfolgend die Körper $K_3, K_4, \dots$ definieren. Der Körper K_i wird erhalten, wenn die l -te Wurzel einer Zahl M_{i-1} des Körpers K_{i-1} , welche in K_{i-1} keine Zahl ist, zum Körper K_{i-1} adjungiert wird: $K_i = k(\sqrt[l]{M_{i-1}}, K_{i-1})$.

In dieser Serie ist der Körper K_i relativ-zyklisch in Bezug auf K_{i-1} vom Relativgrade l . Die Substitutionen der zyklischen Relativgruppe werden durch $1, S_i, S_i^2, \dots, S_i^{l-1}$ gemäß der Kronecker-Hilbert'schen symbolischen Potenzierung bezeichnet¹.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 1. Die Diskriminante des Körpers K_i enthält nebst l nur diejenigen rationalen Primzahlen, die, bzw. deren Potenzen Normen solcher Primideale $\mathfrak{P}_j$ der Unterkörper K_j ($j = 0, 1, \dots, i-1$) von K_i sind, welche in den oben bestimmten Zahlen M_j zu einer, durch l nicht teilbaren Potenz aufgehen.

Beweis: Die Zahl M_{i-1} soll genau durch die u -te Potenz des Primideals $\mathfrak{P}_{i-1}$ teilbar sein. Es sei Π_{i-1} eine Zahl in K_{i-1} , welche durch

¹ D. Hilbert: Bericht über die Theorie der alg. Zahlkörper, 1897, S. 271.

$\mathfrak{P}_{i-1}$, jedoch nicht durch $\mathfrak{P}_{i-1}^2$ teilbar ist und weiters sei Γ_{i-1} eine solche Zahl des Körpers K_{i-1} , welche zu $\mathfrak{P}_{i-1}$ prim ist, aber durch

$$\frac{\Pi_{i-1}}{\mathfrak{P}_{i-1}}$$

teilbar ist. Ist die Zahl u prim zu l , so gibt es zwei rationale ganze Zahlen q, r , mit welchen $qu - rl = 1$ wird.

So ist

$$M'_{i-1} = \left(\frac{\Gamma_{i-1}}{\Pi_{i-1}} \right)^{rl} \cdot M_{i-1}^q$$

eine durch $\mathfrak{P}_{i-1}$, jedoch nicht durch $\mathfrak{P}_{i-1}^2$ teilbare Zahl in K_{i-1} und der Körper $K'_i = k(\sqrt[l]{M'_{i-1}}, K_{i-1})$ ist offenbar gleich mit K_i .

Der gemeinsame Idealteiler von $\mathfrak{P}_{i-1}$ und $\sqrt[l]{M'_{i-1}}$ sei im Körper K_i mit $\mathfrak{P}_i^*$ bezeichnet; dann ist

$$\mathfrak{P}_i^{*1-S_i} = 1 \text{ und } \mathfrak{P}_i^{*l} = \mathfrak{P}_{i-1};$$

$\mathfrak{P}_i^*$ ist also ein ambiges Primideal im Körper K_i . Nach Hilbert² kommt also $\mathfrak{P}_i^*$ in der Relativdifferente des Körpers K_i in Bezug auf K_{i-1} als Faktor vor. Da ferner die Relativediskriminante des Körpers K_i in Bezug auf K_{i-1} die Relativnorm der Relativdifferente ist³, so enthält die Relativediskriminante des Körpers K_i in Bezug auf K_{i-1} das Primideal $\mathfrak{P}_{i-1}$.

Ist dagegen der Exponent u durch l teilbar, so ist die Zahl

$$M''_{i-1} = \left(\frac{\Gamma_{i-1}}{\Pi_{i-1}} \right)^u \cdot M_{i-1}$$

zu $\mathfrak{P}_{i-1}$ prim. Auch in diesem Falle ist der Körper K_i gleich mit dem Körper $K''_i = k(\sqrt[l]{M''_{i-1}}, K_{i-1})$. Die Relativediskriminante der Zahl $\sqrt[l]{M''_{i-1}}$ in Bezug auf K_{i-1} ist $(-1)^{(l-1)/2} \cdot l^l \cdot M''_{i-1}^{l-1}$, also prim zu $\mathfrak{P}_{i-1}$, folglich ist die Relativediskriminante des Körpers K_i in Bezug auf K_{i-1} auch prim zu $\mathfrak{P}_{i-1}$.

Wir bezeichnen die Diskriminante des Körpers K_j durch D_j ($j = 0, 1, \dots, i$) und die Relativediskriminante des Körpers K_j in Bezug auf K_{j-1} durch Δ_j ($j = 0, 1, \dots, i$); nach Hilbert gilt⁴

$$D_i = D_{i-1}^l \cdot N(\Delta_i), \quad (1)$$

² D. Hilbert: loc. cit., S. 277.

³ D. Hilbert: loc. cit., S. 205.

⁴ D. Hilbert: loc. cit., S. 206.

wo $N(\Delta_i)$ die Norm der Relativediskriminante Δ_i bedeutet. Wird diese Relation auf die ganze Serie der Körper $K_i, K_{i-1}, \dots, K_1, K_0$ erstreckt, so erhalten wir

$$D_i = D_0^{l^i} \cdot \prod_{j=1}^i [N(\Delta_j)]^{l^{i-j}}. \quad (2)$$

Da bekanntlich

$$D_0 = (-1)^{(l-1)/2} l^{-2}$$

ist, ergibt (2) den vollständigen Beweis des Satzes 1.

Satz 2. Ist d eine positive ganze Zahl, $d \leq i$, so ist die l^d -te Potenz einer Zahl des Körpers K_i nach dem Modul l mit einer Zahl des Körpers K_{i-d} kongruent.

Beweis: Es sei Φ_i eine Zahl in K_i , welche die allgemeine Form

$$\Phi_i = \varphi_0 + \varphi_1 \sqrt[l]{M_{i-1}} + \varphi_2 (\sqrt[l]{M_{i-1}})^2 + \dots + \varphi_{l-1} (\sqrt[l]{M_{i-1}})^{l-1} \quad (3)$$

hat, wo $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{l-1}$ Zahlen des Körpers K_{i-1} sind. Wird Φ_i zur l -ten Potenz erhoben, so ist der Rest von Φ_i^l nach dem Modul l eine ganzzahlige Relation der Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{l-1}, M_{i-1}$, ist also offenbar eine Zahl in K_{i-1} .

Durch vollständige Induktion erfolgt der Beweis.

In den folgenden wird ein spezieller Fall untersucht. l bedeute von nun an stets eine reguläre Primzahl und die Zahl M_j des Körpers K_j ($j = 0, 1, \dots, i-1$) sei eine nicht primäre Einheit⁵, welche nicht die l -te Potenz einer Einheit in K_j ist. Wir bezeichnen die Glieder dieser Serie von Zahlkörpern durch $k(\zeta), H_1, H_2, \dots, H_i$. Im allgemeinen wird also der Körper H_i durch Adjunktion der l -ten Wurzel der nicht primären Einheit E_{i-1} des Körpers H_{i-1} , welche keine Zahl in H_{i-1} ist, zum Körper H_{i-1} erzeugt: $H_i = k(\sqrt[l]{E_{i-1}}, H_{i-1})$.

Es gilt der folgende Satz:

Satz 3. Die Klassenzahl des Körpers H_i ist prim zu l . Der Körper H_i enthält ein einziges ambiges Primideal $\mathfrak{L}_i$, und ist

$$\mathfrak{L}_i^{l^i(l-1)} = l.$$

Im Fall $i = 1$ hat Pollaczek⁶ die Unteilbarkeit der Klassenzahl von H_1 durch l bewiesen. Daß es in H_1 nur ein einziges ambiges Prim-

⁵ Eine Zahl α heißt bekanntlich in einem, die l -te Einheitswurzel enthaltenden Körper primär, wenn es im Körper eine Zahl β von der Eigenschaft $\alpha \equiv \beta^l \pmod{l}$ gibt.

⁶ F. Pollaczek: Math. Zeitschr., Bd. 21, 1924, S. 1–38.

ideal $\mathfrak{Q}_1$ gibt, wurde durch *Hilbert*⁷ bewiesen.

Ist $i = 2$, so kann die Relativediskriminante des Körpers H_2 in Bezug auf H_1 nicht Eins sein, weil in diesem Falle die Klassenzahl von H_1 nach der Klassenkörpertheorie von *Hilbert*⁸ durch l teilbar sein müßte. Zufolge des Satzes 1 enthält die Diskriminante des Körpers H_2 außer l keine Primzahl, weil E_1 und E_0 Einheiten sind. Hieraus folgt, daß auch die Relativedifferente von H_2 in Bezug auf H_1 nur ein in l aufgehendes Primideal $\mathfrak{Q}_2$ enthalten kann, welches in H_2 ein ambiges Primideal ist². Es gelten also

$$\begin{aligned}\mathfrak{Q}_2^{1-S_1} &= 1, \\ \mathfrak{Q}_2^l &= \mathfrak{Q}_1, \\ \mathfrak{Q}_2^{l^2(l-1)} &= l.\end{aligned}$$

Da die Relativediskriminante des Körpers H_2 in Bezug auf H_1 nur ein einziges Primideal enthält, ist die Anzahl der unabhängigen Basis der Komplexe in H_2 gleich mit der Anzahl der unabhängigen Basiszahlen der singulären Primärzahlen des Körpers H_1 ⁹. In unserem Falle ist die Klassenzahl des Körpers H_1 zu l prim, gibt es daher in H_1 keine singuläre Primärzahlen und ist die Anzahl der unabhängigen Basis der Komplexe in H_2 gleich Null. Hieraus können wir nach *Furtwängler*¹⁰ folgern, daß auch die Anzahl der Basisklassen derjenigen Klassen in H_2 , deren l -te Potenz die Hauptklasse ist, gleich Null ist; die Klassenzahl von H_2 ist also prim zu l .

Mit derselben Überlegung kann auch bestätigt werden, daß die Klassenzahl von H_3 nicht durch l teilbar ist und die Erstreckung der Methode bis auf eine beliebige Zahl i ergibt den vollständigen Beweis.

Satz 4. Jede primäre Einheit des Körpers H_i ist die l -te Potenz einer Einheit von H_i .

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Satz 3 und aus einem Ergebnis von *Vandiver*¹¹, wonach in einem algebraischen Zahlkörper, welcher $k(\zeta)$ enthält, jede primäre Einheit die l -te Potenz einer Einheit des Körpers ist, falls die Klassenzahl des Körpers prim zu l ist.

⁷ *D. Hilbert*: loc. cit., S. 456.

⁸ *D. Hilbert*: loc. cit., S. 279.

⁹ *Ph. Furtwängler*: Math. Ann., Bd. 67, 1909, S. 7—9.

¹⁰ *Ph. Furtwängler*: Math. Ann., Bd. 67, 1909, S. 10.

¹¹ *H. S. Vandiver*: Bull. Amer. Math. Soc., Bd. 40, 1934, S. 855—858.

Ein idealtheoretischer Beweis des Kriteriums von Plücker-Clebsch*.

Von

Josef Schmid, Innsbruck.

(Eingelangt am 21. Februar 1951.)

Das Kriterium von *Plücker-Clebsch* ist ein wichtiges Hilfsmittel der abzählenden Geometrie, das in vielen Fällen die Frage der Auflösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems auf kurzem Wege zu entscheiden vermag. Es ist vor allem das Verdienst *F. Severis*, dieses Kriterium in seiner Bedeutung hervorgehoben, sein Anwendungsgebiet erweitert und den ersten strengen Beweis dafür geliefert zu haben (1933). In der Folge sind noch weitere Beweise, besonders der von *B. L. van der Waerden* bekannt geworden (1935). Neben diesen bereits bekannten Beweisen dürfte es nicht überflüssig erscheinen, den nachfolgenden Beweis zu veröffentlichen, weil er mit rein idealtheoretischen Gedankengängen aufgebaut ist und nebenbei einige interessante Ergebnisse für die Theorie der Polynomideale abwirft.

Gröbner.

1. Einleitung.

In der von *Plücker* und *Clebsch* angegebenen Form lautet das Kriterium:

(I) Wenn ein System von r algebraischen Gleichungen in r Unbekannten $x_1, \dots, x_r$, deren Koeffizienten rational von s Parametern $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ abhängen, für ein besonderes Wertesystem der λ eine endliche Anzahl (> 0) von Lösungen besitzt, so ist es für allgemeine Werte der λ kompatibel.

Severi hat gezeigt, daß dieses System für allgemeine λ kompatibel ist, auch dann, wenn die spezialisierten Gleichungen unendlich viele Lösungen haben, sofern nur eine davon isoliert ist.

Der Beweis *Severi*s ist mit Hilfe der *Kroneckerschen* Eliminationstheorie und der Theorie der analytischen Funktionen geführt¹. Ein

* Im mathematischen Seminar der Universität Innsbruck verfaßte Arbeit.

¹ *F. Severi*, *Lezioni di Analisi*, Bologna 1941, I. Bd., 409–413; vgl. auch *F. Severi*, *Grundlagen der abzählenden Geometrie*, in der Sammlung Mathematische Forschung (herausgegeben von *W. Blaschke*), Wolfenbüttel 1948, S. 52f.; *F. Severi*, *Introduzione alla geometria algebrica*, *Geometria numerativa*, Docet Rom, 1947, Kap. IV, § 2–3 (mit vielen Beispielen und Anwendungen).

weiterer Beweis stammt von *Terracini*². Schließlich ist mir noch eine Abhandlung von *van der Waerden* bekannt, in der das Kriterium ebenfalls bewiesen ist³.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, den Beweis mit Hilfe der Theorie der Polynomideale zu führen. Dazu müssen wir dem Kriterium eine unserer Absicht angepaßte Fassung geben.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir die r Gleichungen

$$f_i(x_1, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (1)$$

ganz rational in den x und λ annehmen. Wir arbeiten also im (inhomogenen) Polynomring $\mathfrak{o} = K[x_1, \dots, x_n]$ ($n = r + s$), wobei wir die Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ebenfalls als Unbestimmte $x_{r+1}, \dots, x_n$ schreiben. Die Nullstellen des Gleichungssystems (1) bilden dann das Nullstellengebilde ($NG(\mathfrak{a})$) eines Ideals $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{o}$, das die ganz rational gemachten linken Seiten der Gleichungen (1) als Basis hat.

Mit $\bar{\mathfrak{a}}$ bezeichnen wir das Ideal in $K[x_1, \dots, x_r]$, das aus $\mathfrak{a}$ hervorgeht, wenn wir die letzten s Unbestimmten in den Polynomen von $\mathfrak{a}$ durch bestimmte spezielle Werte λ aus K ersetzen:

$$\bar{\mathfrak{a}} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r) = (f_1, \dots, f_r)_{x_{r+1}=\lambda_1, \dots, x_n=\lambda_s}$$

$\mathfrak{a}_0$ sei der Durchschnitt von $\mathfrak{a}$ mit $K[x_{r+1}, \dots, x_n]$:

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap K[x_{r+1}, \dots, x_n].$$

Mit diesen Bezeichnungen lautet das von *Severi* verschärfte Kriterium von *Plücker-Clebsch*:

(II) Wenn es ein spezielles Wertesystem $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ gibt derart, daß das entsprechende Ideal $\bar{\mathfrak{a}}$ eine nulldimensionale isolierte Komponente hat, so ist $\mathfrak{a}_0$ das Nullideal.

2. Hilfssätze.

Zunächst stellen wir einige Hilfsmittel aus der Idealtheorie bereit. Die im folgenden verwendeten Begriffe und Bezeichnungen sind die in dieser Theorie allgemein üblichen⁴.

² A. Terracini, Sul criterio di Plücker-Clebsch, Rend. Accad. dei Lincei 1935.

³ B. L. van der Waerden, Zur algebraischen Geometrie VI, Math. Ann. 108 (1935), 137–143.

⁴ Vgl. etwa W. Gröbner, Moderne algebraische Geometrie, Wien 1949 (weiterhin zitiert mit G Nummer. Absatz.), oder B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. II, 1940 (W II § ...).

Sehr nützlich wird uns eine Beziehung sein, die zwischen dem Durchschnitt und der Summe von Idealen besteht.

Zwischen den Idealen $a_1, a_2, \dots, a_t, \mathfrak{b}$ eines kommutativen Ringes $\mathfrak{o}$, in dem der Basissatz⁵ gilt, besteht die Beziehung

$$[(a_1, \mathfrak{b}), \dots, (a_t, \mathfrak{b})]^t \subseteq ([a_1, \dots, a_t], \mathfrak{b}) \subseteq [(a_1, \mathfrak{b}), \dots, (a_t, \mathfrak{b})]. \quad (2)$$

Reduzierte Darstellungen der Ideale $([a_1, \dots, a_t], \mathfrak{b})$ und $[(a_1, \mathfrak{b}), \dots, (a_t, \mathfrak{b})]$ haben dieselben zugehörigen isolierten Primideale⁶.

Beweis:

Wir müssen nur den linken Teil von (2) zeigen, da die rechts stehende Behauptung ohne weiteres klar ist.

Das Ideal $\mathfrak{c} = [(a_1, \mathfrak{b}), \dots, (a_t, \mathfrak{b})]$ möge die Basisdarstellung $(c_1, \dots, c_m)$ haben. Alle Produkte $c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_t}$, wo die $i_1, i_2, \dots, i_t$ eine Kombination (mit Wiederholungen) von $1, 2, \dots, m$ sind, bilden eine Basis von $\mathfrak{c}^t$. Es ist

$$c_{i_j} \equiv 0 \ (a_j, \mathfrak{b}) \quad (j = 1, \dots, t),$$

also

$$c_{i_j} = a_{i_j} + b_{i_j}, \quad a_{i_j} \equiv 0 \ (a_j), \quad b_{i_j} \equiv 0 \ (\mathfrak{b})$$

und somit

$$c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_t} = (a_{i_1} + b_{i_1}) (a_{i_2} + b_{i_2}) \dots (a_{i_t} + b_{i_t}) = a + b,$$

wo

$$a = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_t} \equiv 0 \ ([a_1, \dots, a_t]), \quad b \equiv 0 \ (\mathfrak{b}).$$

Also ist

$$c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_t} \equiv 0 \ ([a_1, \dots, a_t], \mathfrak{b}) \text{ und daher } \mathfrak{c}^t \subseteq ([a_1, \dots, a_t], \mathfrak{b}).$$

Die Behauptung über die isolierten Primideale gilt allgemein für zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, die zueinander in der Beziehung $\mathfrak{b}^t \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ stehen.

Aus (2) folgt leicht die Verallgemeinerung:

$$[(a_1, \mathfrak{b}_1), \dots, (a_i, \mathfrak{b}_j), \dots, (a_t, \mathfrak{b}_s)]^{ts} \subseteq ([a_1, \dots, a_t], [\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_t]) \subseteq ([a_1, \mathfrak{b}_1), \dots, (a_i, \mathfrak{b}_j), \dots, (a_t, \mathfrak{b}_s)].$$

Für das Folgende wählen wir unseren Ring $\mathfrak{o}$ speziell als Polynombereich $K[x_1, \dots, x_n]$, mit einem Konstantenkörper K der Charakteristik Null. Die Polynome dieses Ringes bezeichnen wir mit $a, b, c, \dots$, ohne im allgemeinen ihre Abhängigkeit von den Unbestimmten

⁵ G. 115.10, W II § 84.

⁶ Reduzierte Darstellung oder unverkürzbare Darstellung als Durchschnitt von endlich vielen größten Primärkomponenten. Vgl. dazu G 126.15, W II § 87.

$x_1, \dots, x_n$ zu kennzeichnen. Schließlich werden wir $\mathfrak{o}$ noch erweitern durch Ringadjunktion einer $(n+1)$ -ten Unbestimmten y :

$$\mathfrak{o}^* = K[x_1, \dots, x_n, y].$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal aus $\mathfrak{o}$, so verstehen wir unter dem Erweiterungsideal $\mathfrak{a}^*$ von $\mathfrak{a}$ jenes Ideal in $\mathfrak{o}^*$, das von $\mathfrak{a}$ erzeugt wird; $\mathfrak{a}^*$ hat also die gleiche Basis wie $\mathfrak{a}$. Es ist $\mathfrak{a}^* \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$. Wir werden in $\mathfrak{o}^*$ nur mit Idealen zu tun haben, die in der angegebenen Weise aus einem Ideal von $\mathfrak{o}$ hervorgehen.

Ordnet man ein Polynom $a^* \equiv (a^*)$ nach Potenzen von y , so gehören alle Koeffizienten dem Ideal $\mathfrak{a}$ an.

Wenn für ein Polynom b^* aus $\mathfrak{o}^*$ gilt $b^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}^*}$, so gibt es höchstens endlich viele Werte α aus K derart, daß $b^*_{y=\alpha} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ ist.

Zum Beweis ordnen wir b^* nach Potenzen von y und nehmen $b^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ an:

$$b^* = b_0 y^h + b_1 y^{h-1} + \dots + b_h,$$

alle b_i in $\mathfrak{o}$ und mindestens ein $b_k \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$.

Gäbe es mehr als h verschiedene Werte α aus K , für die $b^*_{y=\alpha} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}$ wäre, so könnten wir $h+1$ solche α herausgreifen:

$$\begin{aligned} \alpha_1^h b_0 + \alpha_1^{h-1} b_1 + \dots + b_h &= a_1 \\ \alpha_2^h b_0 + \alpha_2^{h-1} b_1 + \dots + b_h &= a_2 \quad a_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}, \quad (i = 1, \dots, h+1). \\ &\dots \\ \alpha_{h+1}^h b_0 + \alpha_{h+1}^{h-1} b_1 + \dots + b_h &= a_{h+1} \end{aligned}$$

Das ist ein lineares Gleichungssystem für die b_i , dessen Determinante $\Pi (\alpha_i - \alpha_k) \neq 0$ ist. Also wären alle b_i Linearkombinationen der a_k und $i < k$ somit Elemente von $\mathfrak{a}$, was unserer Annahme widerspräche.

Ist $\mathfrak{p}$ Primideal in $\mathfrak{o}$, so ist $\mathfrak{p}^*$ Primideal in $\mathfrak{o}^*$. Wäre nämlich $a^* b^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$ und $a^* \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$, $b^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^*}$, so ordnen wir die beiden Polynome nach Potenzen von y :

$$a^* = a_0 y^s + a_1 y^{s-1} + \dots, \quad b^* = b_0 y^t + b_1 y^{t-1} + \dots,$$

alle a_i und b_k in $\mathfrak{o}$. Wir können $a_0 \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, $b_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ annehmen. Der höchste Koeffizient von y in $a^* b^*$ ist $a_0 b_0$ und muß in $\mathfrak{p}$ liegen, was im Widerspruch zur Annahme über a_0 und b_0 steht.

Ebenso ist q^* mit q primär. Gehört das Primideal $\mathfrak{p}$ zu q , so gehört $\mathfrak{p}^*$ zu q^* . Wenn nämlich

$$a^* b^* \equiv 0 \pmod{q^*} \quad (3)$$

und

$$a^* \equiv 0 (q^*), \quad b^* \equiv 0 (p^*)$$

wäre, so gäbe es ein α aus K derart, daß

$$a^*_{y=\alpha} \equiv 0 (q), \quad b^*_{y=\alpha} \equiv 0 (p). \quad (4)$$

Es können ja nur endlich viele Elemente aus K andere Verhältnisse erzeugen. Wegen (3) ist jeder Koeffizient des Produkts a^*b^* , wenn man es nach Potenzen von y ordnet, in q , also

$$(a^*b^*)_{y=\alpha} = a^*_{y=\alpha} b^*_{y=\alpha} \equiv 0 (q).$$

Das würde aber wegen (4) bedeuten, daß q nicht primär wäre. Daß p^* zu q^* gehört, folgt aus $(p^*)^e = (p^e)^* \subseteq q^* \subseteq p^*$. (Dieser Beweis ist natürlich auch auf Primideale anwendbar.)

Nun zeigen wir:

Ist $[q_1, \dots, q_t]$ eine reduzierte Darstellung von α , so ist $[q_1^*, \dots, q_t^*]$ eine reduzierte Darstellung von α^* .

Beweis:

a)

$$\alpha^* = [q_1, \dots, q_t]^* \subseteq [q_1^*, \dots, q_t^*].$$

b) Aus

$$\alpha^* \equiv 0 ([q_1^*, \dots, q_t^*])$$

folgt

$$\alpha^* \equiv 0 (q_i^*) \quad (i = 1, \dots, t).$$

Ordnet man α^* nach Potenzen von y , so sind alle Koeffizienten in jedem der Primärideale $q_1, \dots, q_t$ enthalten und damit auch im Durchschnitt $[q_1, \dots, q_t]$. Also ist auch

$$\alpha^* \equiv 0 ([q_1, \dots, q_t]^*)$$

und somit

$$[q_1^*, \dots, q_t^*] \subseteq [q_1, \dots, q_t]^*.$$

Wegen a) bleibt nur das Gleichheitszeichen übrig.

Aus $\alpha = \alpha^* \cap \mathfrak{o} = [q_1^*, \dots, q_t^*] \cap \mathfrak{o} = [q_1^* \cap \mathfrak{o}, \dots, q_t^* \cap \mathfrak{o}] = [q_1, \dots, q_t]$ folgt, daß in $\alpha^* = [q_1^*, \dots, q_t^*]$ kein q_i^* überflüssig ist, da sonst q_i in $\alpha = [q_1, \dots, q_t]$ überflüssig wäre. Ebenso schließt man, daß die zu den Primäridealen q_i^* gehörenden Primideale p_i^* alle voneinander verschieden sind.

Nun sind wir imstande, den folgenden Satz zu beweisen:⁷

⁷ Dieser Satz ist ein Spezialfall des Hilfssatzes aus § 2 der oben erwähnten Arbeit von *van der Waerden*, welcher dort aus dem Hauptidealsatz von *W. Krull*, Primidealketten in allg. Ringbereichen, S.—B. Heidelberger Akad. Wiss. 1928, 7. Abh., § 3 Hauptidealsatz, gewonnen wird. Vgl. auch G. 137.11.

Alle isolierten Primärkomponenten eines Ideals $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$ aus $\mathfrak{o} = K[x_1, \dots, x_n]$, mit r Basispolynomen $f_1, \dots, f_r$, das nicht das Einheitsideal ist, haben eine Dimension $\geq n - r$.

Beweis:

$\mathfrak{a}$ ist nicht das Einheitsideal, also hat es eine Dimension $d(\mathfrak{a}) \geq n - r$. $[q_1, \dots, q_t]$ sei eine reduzierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ mit den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$.

a) Wir zeigen zunächst, daß es in $\mathfrak{a}$ keine isolierten Komponenten q geben kann, mit $0 < d(q) < n - r$.

Angenommen, q_1 sei isoliert und $0 < d(q_1) < n - r$.

$q_1, q_2, \dots, q_s$ ($1 < s \leq t$), seien alle Primärkomponenten von $\mathfrak{a}$, deren Dimension $\geq d(q_1)$ ist. Wir konstruieren ein Polynom f , das keine Nullstellen mit $q_2, \dots, q_s$ gemeinsam hat und in mindestens einer aber nicht in allen Nullstellen von q_1 verschwindet. Das geht auf folgende Weise: Nach Voraussetzung gilt für die zu den q gehörenden Primideale $\mathfrak{p}$:

$$\mathfrak{p}_k \not\equiv 0 (\mathfrak{p}_1) \quad (k > 1).$$

Daher gibt es Polynome $g_2, g_3, \dots, g_s$, die nicht in $\mathfrak{p}_1$ liegen und für die

$$g_2 \equiv 0 (\mathfrak{p}_2), \quad g_3 \equiv 0 (\mathfrak{p}_3), \quad \dots, \quad g_s \equiv 0 (\mathfrak{p}_s)$$

gilt. Gewisse Potenzen dieser g , die wir mit h bezeichnen, liegen in den entsprechenden Primäridealien. Also liegt auch das Polynom $h = h_2 h_3 \dots h_s$ in jedem der Primäridealien $q_2, \dots, q_s$; dagegen liegt h nicht in $\mathfrak{p}_1$. Es gibt also eine Nullstelle $\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = \{\xi\}$ von q_1 derart, daß $h(\xi) = -\alpha \neq 0$ ist. Das Polynom $h + \alpha$ hat keine Nullstelle mit den Primäridealien $q_2, \dots, q_s$ gemein und verschwindet in mindestens einem Punkt des Nullstellengebildes von q_1 . Verschwindet es in allen Punkten von $NG(q_1)$, so gibt es wegen $0 < d(q_1)$ eine zweite Nullstelle $\{\eta\}$ von $NG(q_1)$, mit $\xi_1 \neq \eta_1 \neq 0$, wenn wir etwa annehmen, x_1 sei unabhängig in q_1 . Dann hat das Polynom $f = x_1 h + \eta_1 \alpha$ die verlangten Eigenschaften.⁹

Betrachten wir nun das Ideal $(\mathfrak{a}, f) = (f_1, \dots, f_r, f) = ([q_1, \dots, q_t], f)!$ Nach (2) ist

$$[(q_1, f), \dots, (q_t, f)]^t \subseteq ([q_1, \dots, q_t], f) \subseteq [(q_1, f), \dots, (q_t, f)].$$

⁸ G. 135.11. W II § 98 S 71.

⁹ Wir setzen dabei K entsprechend algebraisch erweitert voraus, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. (Vgl. etwa W II § 98).

Die beiden Ideale $[(q_1, \dots, q_t), f]$ und $[(q_1, f), \dots, (q_t, f)]$ haben dieselben Nullstellengebilde und daher insbesondere die gleiche Dimension. Wegen der Wahl von f ist

$$(q_2, f) = (q_3, f) = \dots = (q_s, f) = \mathfrak{o}.$$

Es ist

$$d(q_1, f) = \bar{d}(q_1) - 1,^{10}$$

also

$$0 \leq \bar{d}(q_1, f) < n - (r + 1).$$

Weiter ist

$$\bar{d}(q_i, f) \leq d(q_1, f) \quad (i = r + 1, \dots, t),$$

also

$$\bar{d}(\mathfrak{a}, f) = \bar{d}(q_1, f)$$

und somit

$$0 \leq \bar{d}(\mathfrak{a}, f) < n - (r + 1).$$

Das steht aber in Widerspruch mit der Anzahl der Basiselemente von $(\mathfrak{a}, f)$.

b) Wenn $\bar{d}(q_1) = 0 < n - r$ ist, betrachten wir $\mathfrak{a}$ im erweiterten Polynombereich $\mathfrak{o}^* = K[x_1, \dots, x_n, y] \cdot [q_1^*, \dots, q_t^*]$ ist eine reduzierte Darstellung von $\mathfrak{a}^* = (f_1, \dots, f_r)^*$ und es ist $d(q_1^*) = 1 < (n+1) - r$. Wäre q_1 isoliert in $\mathfrak{a}$, so müßte q_1^* in $\mathfrak{a}^*$ isoliert sein. Damit hätten wir wieder den Fall a), der unmöglich ist.

Es kann also in $\mathfrak{a}$ nur eingebettete Primärkomponenten von einer Dimension $< n - r$ geben.

3. Beweis des Kriteriums.

Nun beweisen wir das verschärfte Kriterium von *Plücker-Clebsch*, in der Formulierung (II).

Wir nehmen $\mathfrak{a}_0 \supset (0)$ an und zeigen, daß dann notwendig alle isolierten Primärkomponenten von $\bar{\mathfrak{a}}$ eine Dimension ≥ 1 haben, falls $\bar{\mathfrak{a}} \neq (1)$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir alle Konstanten $\lambda = 0$ annehmen und voraussetzen, daß es in $\mathfrak{a}_0$ ein in bezug auf x_n reguläres Polynom gibt¹¹. Das erste können wir durch eine inhomogene lineare Substitution erreichen, die nur die letzten $n - r$ Unbestimmten

¹⁰ G. 133.11. Vgl. auch W II § 95, S. 58.

¹¹ Ein Polynom heißt regulär in bezug auf x_n , wenn der Grad von x_n in dem Polynom > 0 ist und der Koeffizient der höchsten Potenz von x_n eine Konstante $\neq 0$ ist. Vgl. etwa G 114.7, 121.4, W II § 78, S. 3.

betrifft. An den Polynomen $\bar{f} = f_{x_{r+1}=\lambda_1, \dots, x_n=\lambda_s}$ und damit am Ideal $\bar{a}$ ändert sich dadurch überhaupt nichts und a_0 bleibt $\supset (0)$. Die Polynome von a_0 haben jetzt kein konstantes Glied mehr, denn $\{0\}$ ist Nullstelle von a_0 . Die Regularität schließlich können wir durch eine homogene lineare Substitution erreichen, die wieder nur $x_{r+1}, \dots, x_n$ betrifft, ohne am Ideal $\bar{a}$ und der Beziehung $a_0 \supset (0)$ etwas zu ändern¹¹.

Da a nach Voraussetzung eine Nullstelle $\{\xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0\}$ hat, ist das Ideal

$$a_{n-1} = (a, x_{r+1}, \dots, x_{n-1}) = (f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$$

nicht das Einheitsideal und hat wegen der Anzahl der Basiselemente eine Dimension ≥ 1 . Nach dem oben bewiesenen Satz gibt es in einer reduzierten Darstellung von a_{n-1} höchstens eingebettete nulldimensionale Primärkomponenten. Eine solche Darstellung von a_{n-1} sei $[q_1, \dots, q_t]$ mit den zugehörigen Primidealen $p_1, \dots, p_t$. Da nach Voraussetzung in a_0 ein in bezug auf x_n reguläres Polynom vorkommt, enthält a_{n-1} ein nicht identisch verschwindendes Polynom h , das nur von x_n abhängt und kein konstantes Glied hat. Also ist etwa

$$h = x_n^e g(x_n), \quad e > 0, \quad g(0) \neq 0$$

und

$$x_n^e g(x_n) \equiv 0 \pmod{q_i} \quad (i = 1, \dots, t).$$

In mindestens einem zugehörigen Primideal kommt x_n wirklich vor, weil sonst $g^\sigma(x_n) \equiv 0 \pmod{a_{n-1}}$ wäre, für eine geeignet gewählte positive ganze Zahl σ . Das kann aber wegen der Nullstelle $\{\xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0\}$ von a_{n-1} nicht sein. Ein solches Primideal sei p_1 . In p_1 kommt $g(x_n)$ natürlich nicht vor, da es sonst das Einheitsideal wäre. Wir können annehmen, p_1 sei isoliert, also $d(p_1) \geq 1$. Betrachten wir nun das Ideal

$$a_n = (a_{n-1}, x_n) = ([q_1, \dots, q_t], x_n) = (f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Es ist

$$[(q_1, x_n), \dots, (q_t, x_n)]^t \subseteq ([q_1, \dots, q_t], x_n) \subseteq [(q_1, x_n), \dots, (q_t, x_n)].$$

Die Ideale $[(q_1, \dots, q_t], x_n)$ und $[(q_1, x_n), \dots, (q_t, x_n)]$ haben also die gleichen zugehörigen isolierten Primideale. Andererseits besitzt $[(q_1, x_n), \dots, (q_t, x_n)]$ alle und nur die isolierten Primideale, die in a_{n-1} isoliert sind und das Polynom x_n enthalten. Denn für das zu q gehörige Primideal p von a_{n-1} gilt, wenn $x_n \equiv 0 \pmod{p}$ ist,

$$p^e \subseteq (q, x_n) \subseteq p$$

für ein entsprechendes $\mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}$ kommt daher als zugehöriges Primideal in der Primärzerlegung von $(\mathfrak{q}, x_n)$ vor und alle anderen zugehörigen Primideale sind in $\mathfrak{p}$ eingebettet. Ist aber $x_n \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, also $g(x_n) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, so ist $(\mathfrak{p}, x_n) = (\mathfrak{q}, x_n) = \mathfrak{o}$.

Die Dimension der isolierten Komponenten von $[(q_1, x_n), \dots, (q_t, x_n)]$ ist somit ≥ 1 . Also haben auch die isolierten Komponenten von $\mathfrak{a}_n$ eine Dimension ≥ 1 .

Bilden wir nun den Durchschnitt von $\mathfrak{a}_n = (f_1, \dots, f_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ mit $K[x_1, \dots, x_r]$! Dann kommt gerade $\bar{\mathfrak{a}}$ heraus:

$$\bar{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}_n \cap K[x_1, \dots, x_r].$$

Eine reduzierte Darstellung von $\mathfrak{a}$ erhalten wir, indem wir den Durchschnitt der reduzierten Darstellung von $\mathfrak{a}_n$ mit $K[x_1, \dots, x_r]$ bilden¹². Dabei ändert sich an der Dimension auch der Primärkomponenten nichts, denn jede Primärkomponente von $\mathfrak{a}_n$ enthält die Polynome $x_{r+1}, \dots, x_n$. Die Primärkomponenten von $\bar{\mathfrak{a}}$ sind isoliert, wenn die entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{a}_n$ isoliert sind.

$\bar{\mathfrak{a}}$ hat also keine nulldimensionale isolierte Komponente, wenn $\mathfrak{a}_0 \supset (0)$ ist, womit das Kriterium bewiesen ist.¹³

¹² Weil $\mathfrak{a}_n$ die Polynome $x_{r+1}, \dots, x_n$ enthält, werden die Teiler von $\mathfrak{a}_n$ eineindeutig und relationstreu auf die Teiler von $\bar{\mathfrak{a}}$ abgebildet.

¹³ Zusatz bei der Korrektur: Die im zweiten Abschnitt gemachte Voraussetzung über die Charakteristik von K kann man fallen lassen, wenn man etwa annimmt, K sei algebraisch abgeschlossen.

Die isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden und Trochoiden.

Von

Fritz Hohenberg, Graz.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 26. Februar 1951.)

Die isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden und Trochoiden sollen hier aufgezeigt und untersucht werden. Bei den Zykloiden findet man sie auch durch die Betrachtung der komplexen Punkte einer reellen Schraublinie, sie sollen hier jedoch unabhängig von räumlichen Überlegungen gewonnen werden¹.

A. Die isolierten Punkte der gestreckten Zykloiden.

Wenn ein Kreis vom Radius r auf der x -Achse rollt und einen Punkt P mitnimmt, der von seinem Mittelpunkt den Abstand a hat, so beschreibt P die Zykloide

$$x = r\varphi - a \sin \varphi, \quad y = r - a \cos \varphi. \quad (1)$$

Hier bedeutet φ den Rollwinkel. $\varphi = 0$ ergibt die Anfangslage $P_0(0, r - a)$ von P . Bisher wurden bei reellen Werten r und a nur die Kurvenpunkte mit reellem Rollwinkel betrachtet. Als analytische Kurve ist die Zykloide jedoch die Gesamtheit ihrer reellen und komplexen Punkte². Diese ergeben sich aus (1), wenn φ alle komplexen Werte $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ durchläuft.

Kann sich ein reeller Kurvenpunkt auch bei komplexem φ ergeben? Damit y reell sei, muß $\cos \varphi$ reell sein. Wegen

¹ F. Hohenberg, Komplexe Erweiterung der gewöhnlichen Schraublinie, erscheint in den Sitzungsberichten d. Akad. d. Wissenschaften Wien.

² Die Gesamtheit der komplexen Punkte einer Zykloide überblickt man, wenn man die Zykloide als Parallelprojektion einer gewöhnlichen Schraublinie auffaßt und deren komplexe Punkte durch reelle „Bildpfeile“ veranschaulicht. Siehe F. Hohenberg, l. c.

$$\sin \varphi = \sin \varphi_1 Ch \varphi_2 + i \cos \varphi_1 Sh \varphi_2, \quad \cos \varphi = \cos \varphi_1 Ch \varphi_2 - i \sin \varphi_1 Sh \varphi_2 \quad (2)$$

muß $\sin \varphi_1 Sh \varphi_2 = 0$ sein. Ist $Sh \varphi_2 = 0$, also $\varphi_2 = 0$, so erhält man die bekannten Kurvenpunkte mit reellem Rollwinkel. Ist aber $\sin \varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = n\pi$ (n ganz), so folgt weiter durch Nullsetzen des Imaginärteils von x

$$\underline{Sh \varphi_2 = (-1)^n \frac{r}{a} \varphi_2.} \quad (3)$$

Wegen $a > 0$, $r > 0$, $\text{sign } \varphi_2 = \text{sign } Sh \varphi_2$ muß n gerade sein und wegen $|Sh \varphi_2| \geq |\varphi_2|$ hat (3) dann und nur dann Wurzeln, wenn $a < r$ ist. *Gestreckte Zykloiden besitzen daher isolierte Punkte.* Für die beiden entgegengesetzt gleichen Wurzelwerte $\pm \varphi_2$ ergibt sich derselbe isolierte Punkt

$$\underline{x = rn\pi, \quad y = r - a Ch \varphi_2 \quad (n \text{ gerade})} \quad (4)$$

Die Reihenentwicklung

$$y = r - a Ch \varphi_2 = \frac{a}{\varphi_2} (Sh \varphi_2 - \varphi_2 Ch \varphi_2) = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(2n+1)!} \varphi_2^{2n}$$

zeigt, daß $y < 0$ ist, d. h. *die isolierten Punkte der gestreckten Zykloide liegen auf der der Zykloide abgewandten Seite der festen Polbahn.* Wächst a von 0 bis r , so wächst y von $-\infty$ bis 0. Die Entfernung eines isolierten Punktes vom nächstgelegenen Scheitel ($rn\pi, r - a$) ist

$$e = a (Ch \varphi_2 - 1) \quad \text{oder} \quad e = r \varphi_2 Th \frac{\varphi_2}{2}. \quad (5)$$

Die konjugiert komplexen Tangenten jedes isolierten Punktes stehen senkrecht auf den konjugiert komplexen Kurvennormalen und diese gehen durch das Momentanzentrum ($r(n\pi \pm i\varphi_2), 0$).

B. Die isolierten Punkte der gestreckten Trochoiden.

1. Berechnung der isolierten Punkte.

Ist R der Radius des festen und r der des beweglichen Polkreises, Φ der im Mittelpunkt des festen Polkreises entstehende Winkel, und befindet sich der beschreibende Punkt in der Entfernung a vom Mittelpunkt des beweglichen Polkreises, so lautet die Trochoide

$$x = (R - r) \cos \Phi + a \cos \lambda \Phi, \quad y = (R - r) \sin \Phi + a \sin \lambda \Phi,$$

wobei $\lambda = \frac{r - R}{r}.$ (6)

Hier ist R immer positiv, während r ein solches Vorzeichen besitzt, daß beide Kreise sich bei der üblichen Orientierung auch als Zykel berühren. Eine Hypotrochoide ergibt sich, wenn der rollende Kreis innerhalb des festen liegt, also $0 < r < R$, $\lambda < 0$. Eine Epitrochoide ergibt sich, wenn der rollende Kreis außerhalb des festen liegt ($r < 0$) oder ihn umschließt ($r > R$); dabei ist $\lambda > 0$. a hat dasselbe Vorzeichen wie r .

Setzt man $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, so erhält man durch Nullsetzen der Imaginärteile von x und y

$$(R - r) \sin \Phi_1 \operatorname{Sh} \Phi_2 + a \sin \lambda \Phi_1 \operatorname{Sh} \lambda \Phi_2 = 0,$$

$$(R - r) \cos \Phi_1 \operatorname{Sh} \Phi_2 + a \cos \lambda \Phi_1 \operatorname{Sh} \lambda \Phi_2 = 0.$$

Das sind zwei lineare homogene Gleichungen für $\operatorname{Sh} \Phi_2$ und $\operatorname{Sh} \lambda \Phi_2$. Die triviale Lösung $\Phi_2 = 0$ führt auf die bekannten reellen Kurvenpunkte mit reellem Rollwinkel. Für eine nichttriviale Lösung muß die Determinante verschwinden. Das ergibt

$$\frac{R}{r} \Phi_1 = n\pi \quad (n \text{ ganz}), \quad \operatorname{Sh} \Phi_2 = \frac{(-1)^n a}{\lambda r} \operatorname{Sh} \lambda \Phi_2. \quad (7)$$

Auch hier zeigt sich, daß n gerade sein muß und daß isolierte Punkte nur bei gestreckten Trochoiden auftreten. Nach (6) und (7) haben sie die Koordinaten $x = \varrho \cos \Phi_1$, $y = \varrho \sin \Phi_1$ mit

$$\Phi_1 = \frac{r n \pi}{R} \quad (n \text{ gerade}), \quad \varrho = (r - R) \frac{\operatorname{Sh} \frac{R}{r} \Phi_2}{\operatorname{Sh} \lambda \Phi_2} = a \frac{\operatorname{Sh} \frac{R}{r} \Phi_2}{\operatorname{Sh} \Phi_2}. \quad (8)$$

Die isolierten Punkte liegen also auf einem mit dem festen Polkreis konzentrischen Kreis vom Radius ϱ . Sie liegen auf diesem Kreis sogar dicht, wenn R und r inkommensurabel sind.

Auf den Verbindungsgeraden des Mittelpunktes des festen Polkreises mit jenen Lagen des beschreibenden Punktes, wo dieser dem festen Polkreis am nächsten liegt, liegt je ein isolierter Punkt. Seine Entfernung vom nächstgelegenen Scheitel der Trochoide ist $e = R - r + a - \varrho$ oder

$$e = \frac{2(R - r)}{1 - Cth \frac{\Phi_2}{2} Cth \frac{R}{r} \frac{\Phi_2}{2}}. \quad (9)$$

2. Zwei Grenzfälle.

Aus (7) folgt

$$\frac{a}{r - R} = \frac{Sh\Phi_2}{Sh\lambda\Phi_2}. \quad (10)$$

a) Der rechte Ausdruck wird für $\Phi_2 = 0$ unbestimmt. Für $\Phi_2 \rightarrow 0$ ergibt sich $a = r$, d. h. für $a \rightarrow r$ gehen die isolierten Punkte der gestreckten Trochoide in die Spitzen der Zykloide über.

b) Für $\Phi_2 \rightarrow +\infty$ wird die rechte Seite von (10) ebenfalls unbestimmt. Bei einer Epitrochoide kann man nun $Sh\lambda\Phi_2$ wegen $\lambda > 0$ durch $\frac{1}{2} \exp \lambda\Phi_2$ annähern, bei einer Hypotrochoide wegen $\lambda < 0$ durch $\frac{1}{2} \exp (-\lambda\Phi_2)$. Ersetzt man noch $Sh\Phi_2$ für große positive Φ_2 durch $\frac{1}{2} \exp \Phi_2$, so folgt bei einer Epitrochoide $a = (r - R) \exp \frac{R}{r} \Phi_2$.

Wählt man jene Erzeugung der Epitrochoide, bei der der rollende Kreis außerhalb des festen liegt ($r < 0$), so ergibt sich für große positive Φ_2 , daß a gegen 0 strebt. Aus (9) folgt dann $e \rightarrow R - r$. Bei einer Hypo-

trochoide hingegen folgt $a = (r - R) \exp. (2 - \frac{R}{r}) \Phi_2$. Wählt man hier jene Erzeugung der Hypotrochoide, bei der der Mittelpunkt des festen Polkreises außerhalb des rollenden Kreises liegt ($r < \frac{R}{2}$), so ergibt sich für große positive Φ_2 , daß a ebenfalls gegen 0 strebt. Aus (9) folgt dann $e \rightarrow \infty$, also $\varrho \rightarrow \infty$. Dasselbe folgt für $\Phi_2 \rightarrow -\infty$, also:

Für $a \rightarrow 0$ vereinigen sich die isolierten Punkte einer Epitrochoide im Mittelpunkt des festen Polkreises, bei einer Hypotrochoide entschwinden sie ins Unendliche.

3. Einfluß der doppelten Erzeugbarkeit der Trochoiden.

Eine durch R , r und a bestimmte Trochoide wird noch auf eine zweite Art, beim Abrollen eines Kreises vom Radius r' auf einem Kreis vom Radius R' von einem Punkt im Abstand a' von der Mitte des beweglichen Polkreises beschrieben. Der erste und der zweite feste Polkreis sind konzentrisch. Es ist³

$$R' = \frac{a}{r} R, \quad r' = \frac{a}{r} (R - r), \quad a' = R - r. \quad (11)$$

Daraus folgt

³ Siehe z. B. Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, III D 4, S. 193.

$$\frac{a'}{r'} = 1 : \frac{a}{r}, \quad \lambda' = \frac{r' - R'}{r'} = 1 : \frac{r - R}{r} = \frac{1}{\lambda}. \quad (12)$$

Bei der zweiten Erzeugung der Trochoide gelten die zu (7) und (8) analogen Gleichungen mit gestrichenen Größen R' , r' , a' , Φ_1' , Φ_2' , ϱ' . Wegen (12) folgt

$$\Phi_1' = -\lambda \Phi_1, \quad \Phi_2' = \lambda \Phi_2, \quad \varrho' = \varrho, \quad \frac{\varrho'}{R'} = \frac{\varrho}{R} : \frac{a}{r} \quad (13)$$

und es ist

$$\frac{\varrho'}{R'} : \sqrt{\frac{a'}{r'}} = \frac{\varrho}{R} : \sqrt{\frac{a}{r}}. \quad (14)$$

4. Diagramm.

Abb. 1 ist ein $(\frac{a}{r}, \frac{\varrho}{R})$ -Diagramm mit logarithmischen Skalen, die je von 0.01 bis 100 laufen. Es enthält die punktweise berechneten Kurven $\lambda = \text{const.}$, die fast geradlinig vom Ursprung ($\frac{a}{r} = 1, \frac{\varrho}{R} = 1$) ausgehen und *außerhalb des Diagramms* mit dem zugehörigen Wert λ beziffert sind. Ferner sind die nach links offenen Kurven $|\Phi_2| = \text{const.}$ eingetragen, sie sind *am inneren Rand des Diagramms* beziffert.

Die zu Hypotrochoiden ($\lambda < 0$) gehörigen λ -Kurven liegen im Winkelraum von 135° zwischen der negativen Abszissenachse und der Winkelsymmetrale des ersten Quadranten, die zu Epitrochoiden ($\lambda > 0$) gehörigen λ -Kurven liegen außerhalb dieses Winkelraums. In den geometrisch bedeutungslosen Fällen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ und im Falle der elliptischen Bewegung ($\lambda = -1, R = 2r$) ist die λ -Kurve eine Gerade.

$\lambda = 0$ oder $R = r$ ergibt nach (7) und (8) $\lg \frac{a}{r} = \lg \frac{\varrho}{R} = Sh\Phi_2/\Phi_2 > 1$.

Das liefert die Schnittpunkte der Φ_2 -Kurven mit der Winkelsymmetralen des ersten Quadranten; sie haben dort lotrechte Tangenten.

$\lambda = 1$ oder $R = 0$ liefert $\frac{a}{r} = 1, \lg \frac{\varrho}{R} = \Phi_2/Sh\Phi_2 < 1$, also die negative Ordinatenachse und ihre Schnittpunkte mit den Φ_2 -Kurven. $\lambda = -1$ oder $R = 2r$ (elliptische Bewegung) liefert, wenn $\Phi_2 \neq 0$ ist, $\frac{a}{r} = 1, \lg \frac{\varrho}{R} = Ch\Phi_2 > 1$, also die positive Ordinatenachse und ihre

Schnittpunkte mit den Φ_2 -Kurven. Ist jedoch bei der elliptischen Bewegung $a \neq r$, so folgt auch als nichttriviale Lösung $\Phi_2 = 0$, d. h. die isolierten Punkte vereinigen sich mit dem reellen Zug der Bahnellipse.

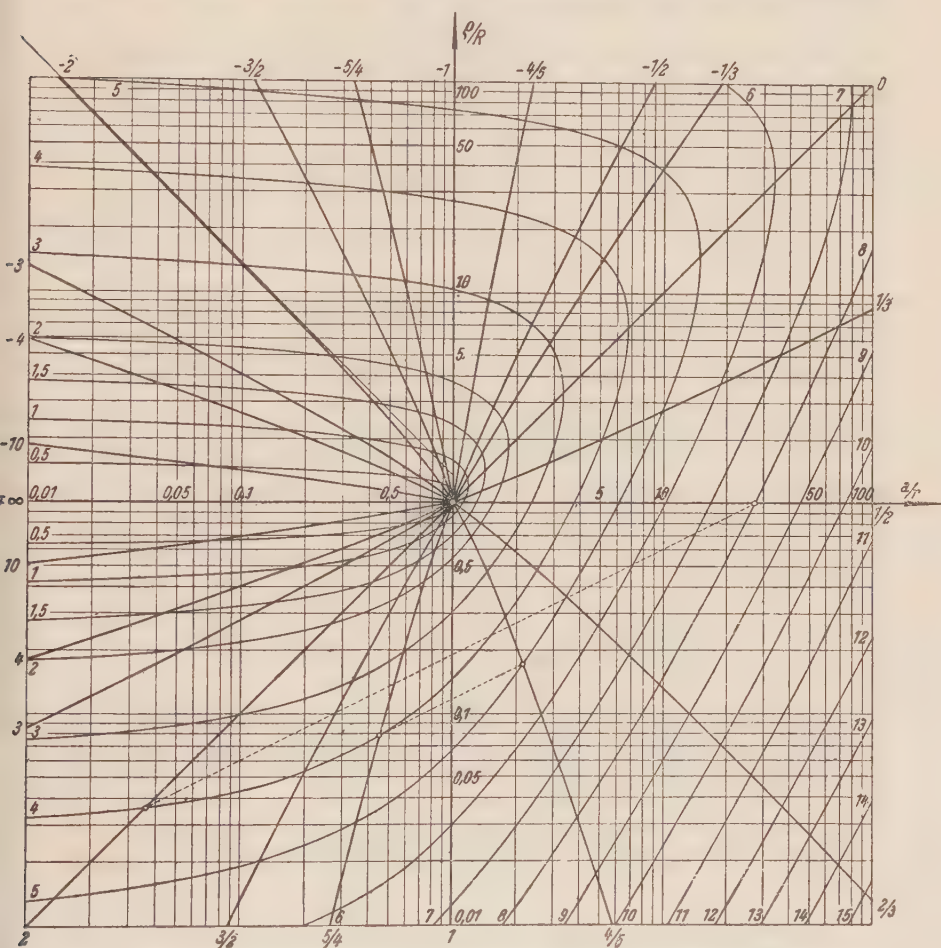


Abb. 1. Diagramm zur Bestimmung der isolierten Punkte der gestreckten Trochoiden.

Nach (7) ergeben je zwei entgegengesetzt gleiche Werte von λ bei gleichem $\frac{a}{r}$ denselben Wert $|\Phi_2|$. In dieser Weise gehören z. B. die Werte $\lambda = 1$ (d. h. $R = 0$) und $\lambda = -1$ (d. h. $R = 2r$, elliptische Bewegung) zusammen. Für $\lambda = \pm 2$ ergibt sich $Ch\Phi_2 = \frac{r}{a}$; für $R = -r$

(Pascalsche Schnecke) folgt dann $\varrho = -a$ (wegen $r < 0$ ist $a < 0$, daher $\varrho > 0$); für $R=3r$ (gestreckte Hypotrochoide, die zur Steinerschen Hypozykloide gehört) folgt $\varrho = \frac{4R^2}{9a} - a$.

Wie äußert sich die doppelte Erzeugbarkeit der Trochoiden im Diagramm? Aus (12), (13) und (14) folgt

$$\lg \frac{a'}{r'} = -\lg \frac{a}{r}, \quad \lg \frac{\varrho'}{R'} = \lg \frac{\varrho}{R} - \lg \frac{a}{r},$$

$$\left(\lg \frac{\varrho'}{R'} - \lg \frac{\varrho}{R} \right) : \left(\lg \frac{a'}{r'} - \lg \frac{a}{r} \right) = 1 : 2,$$

d. h.: Die Kurvenschar $\lambda = \text{const.}$ getattet die schiefe Symmetrie an der Geraden $\frac{a}{r} = 1$ in der Richtung $\arctg \frac{1}{2}$. Demnach erfährt im Diagramm der Winkelraum der Hypotrochoiden eine schiefe Spiegelung an der positiven Ordinatenachse, der Winkelraum der Epitrochoiden eine schiefe Spiegelung an der negativen Ordinatenachse (in Abb. 1 gestrichelt angedeutet). Dabei geht nach (12) und (13) die Kurve $\lambda = c$ in die Kurve $\lambda = 1/c$ über. Die Φ_2 -Kurven gehen jedoch nicht wieder in Φ_2 -Kurven über.

5. Näherungsformeln für die isolierten Punkte.

1. Bei einer Hypotrochoide ist $0 < r < R$ und $\lambda < 0$. Für große positive Φ_2 ist daher näherungsweise nach (7) und (8), wenn man $Sh\Phi_2$ durch $\frac{1}{2} \exp \Phi_2$ usw. ersetzt,

$$a = (R - r) \exp. \frac{2r - R}{r} \Phi_2, \quad \varrho = (R - r) \exp. \Phi_2,$$

also

$$\lg \frac{\varrho}{R} = \frac{r}{2r - R} \lg \frac{a}{r} - \frac{r}{2r - R} \lg \frac{R - r}{r} + \lg \frac{R - r}{R}. \quad (15)$$

Für große negative Φ_2 kommt man zur gleichen Formel. (15) stellt im Diagramm eine Gerade dar. Da $\Phi_2 \rightarrow \infty$ entweder zu $a/r \rightarrow 0$ oder $a/r \rightarrow \infty$ und zu $\varrho/R \rightarrow 0$ oder $\varrho/R \rightarrow \infty$ führt, ist diese Gerade die Asymptote der zu den Hypotrochoiden (R, r) gehörigen λ -Kurve. Die Abweichung der Asymptote von der Kurve ist sehr gering (siehe z. B. die im Diagramm eingetragene Asymptote zu $\lambda = -2$, $R = 3r$). Man

kann daher (15) als *Näherungsformel für die Entfernung ϱ der isolierten Punkte einer Hypotrochoide vom Mittelpunkt des festen Polkreises* nehmen und erhält

$$\frac{\varrho}{R-r} \doteq \left(\frac{a}{R-r} \right)^{\frac{r}{2r-R}}. \quad (16)$$

Diese Formel ist um so genauer, je kleiner a ist. Sie liefert z. B. für $R = 3r$ die Näherung $\varrho \doteq \frac{4R^2}{9a}$ gegenüber dem genauen Wert

$$(B. 4.) \varrho = \frac{4R^2}{9a} - a.$$

2. Bei einer Epitrochoide ist $\lambda > 0$ und $r < 0$ oder $r > R$.

a) Im Fall $r < 0$ folgt wie oben als Asymptote der λ -Kurve im Diagramm

$$\lg \frac{\varrho}{R} = -\frac{r}{R} \lg \frac{a}{r} + \frac{r}{R} \lg \frac{r-R}{r} + \lg \frac{R-r}{R}.$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\frac{\varrho}{R-r} \doteq \left(\frac{a}{r-R} \right)^{-\frac{r}{R}}. \quad (17)$$

b) Im Fall $r > R$ folgt als Asymptote der λ -Kurve im Diagramm

$$\lg \frac{\varrho}{R} = \frac{2R-r}{R} \lg \frac{a}{r} - \frac{2R-r}{R} \lg \frac{r-R}{r} + \lg \frac{r-R}{R}.$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\frac{\varrho}{r-R} \doteq \left(\frac{a}{r-R} \right)^{\frac{2R-r}{R}}. \quad (18)$$

Buchbesprechungen.

Josiah Willard Gibbs. *The History of a Great Mind.* Von *L. Ph. Wheeler.* Mit 17 Abb., XI, 264 S. New Haven: Yale University Press. 1951. Geb. \$ 4.—.

Der Verfasser, der selbst ein Schüler W. Gibbs war, schrieb in diesem Buche eine maßgebliche Biographie dieses bedeutenden amerikanischen Physikers. Angefangen von Gibbs frühester Jugend, als Student, als Wissenschaftler (Thermodynamik, Vektoranalysis, Optik, Statische Mechanik) und als Lehrer gibt L. Ph. Wheeler in vorzüglich klarer Darstellung ein eindrucksvolles Bild des Lebens und Werkes W. Gibbs. Indem der Verfasser auch in einer einfachen, leicht verständlichen Art auf die Grundgedanken der Gibbs'schen Arbeiten eingeht, erhält auch der Nichtphysiker eine klare Vorstellung von der wissenschaftlichen Bedeutung W. Gibbs. Daß diese Bedeutung seiner Werke auch schon von den bekanntesten Wissenschaftlern seiner Zeit erkannt wurde, ist aus dem reichen diesbezüglich in dem Buche veröffentlichten Briefwechsel ersichtlich. In einem Anhang befindet sich u. a. auch ein Verzeichnis der wissenschaftlichen Korrespondenz W. Gibbs, sowie eine Bibliographie der über W. Gibbs geschriebenen Aufsätze und Bücher, wie auch ein Abdruck der ersten wissenschaftlichen Arbeit W. Gibbs. Somit dürfte dieses Buch nicht nur von dem mit den Gibbs'schen Arbeiten bereits bekannten Physiker, sondern auch von allen anderen, die Gibbs als Mensch, sein Werk und seine Bedeutung kennen lernen wollen, mit Befriedigung gelesen werden.

E. Höfinger, Wien

Höhere Algebra. Von *H. Hasse.* I: Lineare Gleichungen. Dritte Auflage. (Sammlung Götschen: Band 931.) 152 S. DM 2.40. — II: Gleichungen höheren Grades. Dritte Auflage. (Sammlung Götschen: Band 932.) 158 S. DM 2.40. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1951.

Es ist sehr zu begrüßen, daß die beiden Bücher in neuer Auflage erschienen sind. Dank des billigen Preises können sie auch von den Studenten leicht erworben werden. In prägnanter, stark zum Mitdenken zwingenden Darstellung werden die linearen Gleichungssysteme und die Gleichungen höheren Grades behandelt. Die Grundaufgabe der klassischen Algebra, formale Methoden zu entwickeln, um Gleichungen aufzulösen, ist wegweisender Leitfaden, aber die Durchführung und das Ziel berücksichtigen die moderne Algebra, als die Lehre von den formalen Rechenbereichen und deren Hauptaufgabe, die Gewinnung von Einsichten in die Struktur solcher Bereiche. So werden diese Bereiche (Ring, Körper, Integritätsbereich) gleich eingangs behandelt und immer zugrunde gelegt. Mit Hilfe der Galois'schen Theorie erhält man tiefen Einblick in die Struktur der Wurzelkörper algebraischer Gleichungen. Die dritte Auflage unterscheidet sich von der zweiten nur durch kleine Zusätze. Frühere, teils sehr ausführliche Besprechungen finden sich in dieser Zeitschrift: *Mh. Math.* **35**, 9 (1928), **36**, 17 (1929), **41**, 16 (1934), **46**, 7 (1938).

N. Hofreiter, Wien

Algebra. Von *O. Perron*. I: Die Grundlagen. Dritte Auflage. (Göschens Lehrbücherei: Band 8.) Mit 4 Textabb., VI, 300 S. DM 16.—. — II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Dritte Auflage. (Göschens Lehrbücherei: Band 9.) Mit 5 Textabb., 260 S. DM 14.—. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1951.

Die dritte Auflage ist ein anastatischer Neudruck, wobei kleine Änderungen vorgenommen wurden. Die beiden früheren Auflagen wurden in dieser Zeitschrift (Mh. Math. 36, 16 (1929), 40, 1 (1933)) besprochen. Es wird daher genügen, auf die Neuauflage hinzuweisen und festzustellen, daß die Bücher auch nach zwanzig Jahren ihren ehrenvollen Platz in der Lehrbuchliteratur über Algebra einnehmen. Charakteristisch für die Bücher sind: Vektorfreie Behandlung der Determinanten und der linearen Gleichungssysteme, Beschränkung auf Körper der Charakteristik 0, ausführliche Behandlung von Polynomen mit mehreren Variablen einschließlich der Resultanten und des Bézout'schen Theorems, eingehende Untersuchung der Gleichungen fünften Grades mit Hilfe der elliptischen Funktionen. Die Darstellung ist exakt, aber doch für Studierende faßlich.

N. Hofreiter, Wien

Einführung in die Vektorrechnung. Von *A. Hofmann*. Mit 81 Textabb., 111 S. München: R. Oldenbourg. 1950.

Das Büchlein ist ein Versuch, die Vektoralgebra dem Mittelschulunterricht näherzubringen, wo dieses nützliche Werkzeug bisher noch nicht die gebührende Aufnahme gefunden hat. Das Problem ist fast ein psychologisches zu nennen: Wie zerstreut man Angst und Mißtrauen vor dem neuartigen Rechenapparat? Das Buch ist für diesen Zweck sicherlich geeignet, da es ganz zwanglos geschrieben ist und durch zahlreiche leichte Beispiele die Arbeitsfreude des Lesers steigert. Es ist zu hoffen, daß viele diesen mühelosen Weg beschreiten werden.

K. Prachar, Wien

Geheimnisse der Rechenkünstler. Von *Ph. Maennchen*. Fünfte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 13.) 43 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. § 0,37.

Diese Schrift führt in die Geheimnisse der Rechenkünstler ein; sie bringt Methoden, um im Kopf höhere Wurzeln aus Potenzzahlen auszuziehen. Sie zeigt, wie man das Osterdatum rasch berechnen kann, und berichtet über die indische Kreuzmethode. Aus der Zahlentheorie werden die Neunerprobe, die Elferprobe und der kleine Fermat'sche Satz gebracht. Das Heft ist äußerst anregend geschrieben und jedermann, der Interesse an Zahlen hat, wärmstens zu empfehlen. Die fünfte Auflage unterscheidet sich durch geringe Änderungen von den früheren Auflagen.

N. Hofreiter, Wien

Infinite Matrices and Sequence Spaces. Von *R. G. Cooke*. XIII, 347 S. London: Macmillan and Co. Limited. 1950. Geb. 42 s. net.

Das Buch entwickelt die Theorie der unendlichen Matrizen insbesondere im Hinblick auf ihre Bedeutung für die allgemeine Summationstheorie der Reihen. Der Verfasser, der selbst auf diesem Gebiete wichtige Arbeiten veröffentlicht hat, hat sehr viel Material verarbeitet und viele Einzelheiten zu einem Ganzen zusammengefügt, wobei er dem durchaus modernen Gepräge dieser Arbeitsrichtung Rechnung getragen hat und die Literatur bis zum Erscheinungsjahr

des Buches berücksichtigt hat. Manches erscheint hier zum ersten Mal dargestellt, so ein Satz von Olga Taussky über die Nichtlösbarkeit der Matrizen Gleichung der Quantentheorie. Es entspricht der Anlage des Buches, daß die allgemeinen Gesichtspunkte in den Vordergrund treten, doch ist es gelungen, zum Teil auch durch zahlreiche und oft interessante Beispiele am Schluß jedes Kapitels in die spezielle Theorie gewisser wichtiger Summationsverfahren tiefer einzudringen. Leider konnte das Hausdorffsche Verfahren anhangsweise nur kurz erwähnt werden. An den Anfang des Buches ist die mehr algebraische Seite der Matrizentheorie gestellt (Die Inversen unendlicher Matrizen und lineare Matrizengleichungen), doch werden auch hier die Dinge wesentlich für die spätere Anwendung in der Summationstheorie entwickelt. An ein Kapitel über den Hilbert'schen Raum schließt sich das interessante letzte Kapitel, welches die Theorie der Folgenräume behandelt im Sinne der grundlegenden Untersuchungen von Köthe und Toeplitz und einer kürzlich erschienenen Arbeit von Allen. Der Verfasser hat die Schwierigkeiten, die sich der erstmaligen Publikation dieser spröden Materie in Buchform entgegenstellen, überwunden und das Werk muß für alle in dieser Richtung interessierten Leser als sehr empfehlenswert angesehen werden.

L. Schmetterer, Wien

Mengenlehre. Von *E. Kamke*. Zweite Auflage. (Sammlung Göschen: Band 999.) Mit 6 Textabb., 159 S. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1951. DM 2.40.

Gegenüber der ersten Auflage sind geringfügige Änderungen vorgenommen worden. Das Literaturverzeichnis ist durch Angabe der beiden Monographien von Sierpinski bereichert worden. Auf S. 82 ist z. B. die Bezeichnung „offen“ für geordnete nicht leere Mengen ohne Randelemente in „unberandet“ abgeändert. Die Schlußbemerkungen über die Paradoxien sind um eine Seite vermehrt und der Hinweis auf das Lehrbuch von Fraenkel in der ersten Auflage durch einen Verweis auf den einschlägigen Enzyklopädieartikel des Verfassers in der Neuausgabe ersetzt worden. Es ist sehr begrüßenswert, daß durch diese Neuauflage der Mangel an erschwinglichen und trotz der Enge des zur Verfügung stehenden Raumes keineswegs an der Oberfläche bleibenden Darstellungen der Mengenlehre wieder behoben ist.

L. Schmetterer, Wien

Vorlesungen über höhere Mathematik. Von *A. Duschek*. Zweiter Band: Unendliche Reihen. — Integration und Differentiation der Funktionen von mehreren Veränderlichen. — Abschluß der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung. — Lineare Algebra. — Tensorfelder. Mit 125 Textabb., VI, 386 S. Wien: Springer-Verlag. 1950. S 87.—, geb. S 96.—; sfr. 33.90, geb. sfr. 37.80; § 7.80, geb. § 8.70; DM 26.—; geb. DM 29.—.

Während im ersten Band nur gelegentlich von unendlichen Reihen die Rede war, erfolgt nun eine systematische und gründliche Behandlung. Verhältnismäßig ausführlich werden die Fourier'schen Reihen behandelt, die freilich für die angewandte Mathematik von besonderer Wichtigkeit sind. Dann folgt ein Abschnitt über Funktionen von mehreren Veränderlichen. Ausführlich werden Grenzwert, Stetigkeit, Differentiation, ferner implizite Funktion, Taylor'sche Formel und Extrema ohne und mit Nebenbedingungen besprochen. Dieser Abschnitt enthält aber auch die Elemente der Determinantentheorie, ferner ausführlich die Theorie der ebenen Kurven und die Grundbegriffe der Vektorrechnung. Neben der

symbolischen Schreibweise werden die Vorteile der analytischen Methode klar herausgearbeitet. Der 3. Abschnitt enthält die Integration von Funktionen mit mehreren Veränderlichen, insbesondere Integrale als Funktionen eines Parameters, Kurvenintegrale in der Ebene, mehrfache Integrale, mit vielen Anwendungen in der Geometrie und Mechanik. Im 4. Abschnitt werden die Grundformeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Theorem von Bernoulli, Poisson, Bayes) mit Hilfe des Laplace'schen Grenzwertsatzes umgeformt und Näherungsausdrücke erzielt, die für das praktische Rechnen von besonderer Wichtigkeit sind. Dann folgen die Grundzüge der Fehlertheorie und das Wichtigste über Ausgleichsrechnung. Im 5. Abschnitt werden die bisher erworbenen Kenntnisse über Determinanten und lineare Gleichungen wesentlich vertieft. Es folgen die für die analytische Geometrie so wichtigen linearen Transformationen, dann die allgemeinen Begriffe der Vektoren und Tensoren. Der 6. und letzte Abschnitt ist der Tensoranalysis gewidmet. Er bringt die Differentiation und Integration der Feldgrößen und vermittelt mit den Methoden der Tensorrechnung ein tieferes Verständnis der Kurven- und Flächenintegrale und der Integralsätze.

Man staunt über die Fülle und Tiefe des hier Gebotenen. Da sich dies im wesentlichen mit den Vorlesungen des Verfassers deckt, so erkennt man die umfassende und gründliche Ausbildung in der Mathematik an der Wiener Technischen Hochschule. Es wäre nur zu wünschen, daß die Mathematik an allen technischen Hochschulen so gründlich betrieben wird. Immer wieder kann man die pädagogische Begabung des Autors bewundern. Treten naturnotwendig Schwierigkeiten auf, so wird der Sachverhalt zuerst an Beispielen auseinandergesetzt. Für das Verständnis des Lesers ist es auch förderlich, daß die Bedeutung der Sätze auseinandergesetzt wird. Besonders wertvoll für den angehenden Ingenieur sind die Hinweise auf Anwendungen, ferner die zahlreichen Aufgaben einschließlich der Lösungen. Besonders hervorheben möchte ich den schönen Druck, wodurch das Studium wesentlich erleichtert wird.

N. Hofreiter, Wien

Analyse mathématique. Von P. Appell. Sechste Auflage, durchgesehen von G. Valiron. Zwei Teilbände. IX, 850 S. Paris: Gauthier-Villars. 1951.

Das Werk stellt eine Behandlung des mathematischen Lehrstoffes dar, den ein Student etwa in den ersten beiden Semestern sich aneignen sollte: Differential- und Integralrechnung, Elemente der analytischen Geometrie, der Differentialgleichungen, der Fourier'schen Reihen, der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Determinanten. Mit großem pädagogischem Geschick wird dabei der Nachdruck darauf gelegt, das richtige Verständnis und die sichere Handhabung der Methoden zu erzielen. Eine am Ende des Werkes angefügte reiche Sammlung schöner Aufgaben wird diese Tendenz nachdrücklich unterstützen. Demgegenüber sind die größere begriffliche Schwierigkeiten bietenden Fragen in den Hintergrund geschoben; so wird z. B. die Einführung der Irrationalzahlen (durch Schnitte) am Anfang des Buches wohl kurz besprochen, dann aber muß die Anschauung von der Zahlenlinie die dem Anfänger schwer nahezubringende (genetische oder axiomatische) Theorie der reellen Zahlen ersetzen. Ebenso wenig lassen sich die Verfasser auf einen Beweis etwa des Weierstraß'schen Satzes vom Maximum oder der gleichmäßigen Stetigkeit der in einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen ein, führen vielmehr diese und ähnliche Tatsachen als Lehrsätze unter Verzicht auf den Beweis an. Im übrigen geschieht der Aufbau mit aller Strenge und in großer Ausführlichkeit, was gewiß zur Verständlichkeit beiträgt. Man vergleiche etwa das Kapitel über die Taylor'sche Formel mit

anderen Darstellungen: hier wir auf fast 40 Seiten der Gebrauch der endlichen Taylorentwicklung an zahlreichen Beispielen gelehrt und als Hauptanwendung die Lehre von den unbestimmten Formen und von der Berührung ebener Kurven entwickelt. Von dem übrigen Inhalt des Werkes sei etwa noch erwähnt, daß auch der Gebrauch komplexer Variabler soweit gelehrt wird, daß ihrer Verwendung bei der Integration rationaler Funktionen sowie bei der Integration linearer Differentialgleichungen nichts im Wege steht, was für das praktische Rechnen von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist. Das (in der vorliegenden Auflage neu hinzugekommene) Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung scheint dem Referenten besonderer Beachtung wert: es dürfte kaum möglich sein, auf dem knappen Raum von 30 Seiten eine bessere Einführung zu geben, bei der die hier so besonders heikle Verbindung zwischen mathematischer Theorie und Anwendung in aller wünschenswerten Klarheit hergestellt wird.

Wir möchten das Buch besonders für solche Vorlesungen empfehlen, die für Naturwissenschaftler und Techniker gehalten werden. Die Lernenden, aber auch die Lehrer werden aus seiner Lektüre großen Nutzen ziehen.

J. Radon, Wien

The Kernel Function and Conformal Mapping. Von *St. Bergman*. (Mathematical Surveys: V.) VI, 161 S. New York: American Mathematical Society. 1950. \$ 4.—.

Das Werk beschäftigt sich mit den Orthogonalfunktionen über komplexen Bereichen. Die Theorie dieser Orthogonalfunktionen war bisher auf viele Originalarbeiten verstreut. (Ausgenommen nur die orthogonalen Polynome, die in der bekannten Szegő'schen Monographie ausführlich behandelt sind.) Der Verfasser, der an der Entwicklung der Theorie selbst wesentlichen Anteil hat, hat nun eine zusammenfassende Darstellung dieses Gebietes gegeben. Der Hauptteil des Buches ist der Verwendung der orthogonalen Funktionensysteme in der konformen Abbildung gewidmet. Hier spielt die sogenannte Kernfunktion eine zentrale Rolle, d. i. die Funktion $K(z, \bar{u}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(u)}$, worin $\varphi_n(z)$ das zum Bereich gehörige Orthogonalsystem ist. Die mannigfachen Zusammenhänge dieser und analog gebildeter Funktionen mit der Abbildungsfunktion, mit der Green'schen Funktion, der Neumann'schen Funktion u. a. wird ausführlich dargelegt. Besonders zu erwähnen sind die Variationsmethoden, die die Variation der obigen Funktionen bei Änderung des Bereiches liefern. Ein Kapitel über partielle Differentialgleichungen zeigt die Anwendbarkeit der „Methode der Kernfunktion“ auf andere als die Laplace'sche Differentialgleichung, worin ein Hauptvorteil dieser Methode zu sehen ist. Der Schlußabschnitt ist Begriffsbildungen für Funktionen von zwei komplexen Variablen gewidmet, ein Gebiet, das durch die Forschungen des Verfassers ebenfalls wesentlich gefördert wurde.

Die Darstellung ist sehr klar und bringt die wesentlichen Dinge immer gut zum Ausdruck. Man muß dem Verfasser für dieses ausgezeichnete Buch dankbar sein.

K. Prachar, Wien

Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen und deren Anwendungen. Von *E. Graeser*. Mit 49 Textabb., 144 S. München: R. Oldenbourg. 1950.

Dies ist ein hübsches und sehr klar geschriebenes Lehrbuch der elliptischen Funktionen, welches ohneweiters eine sichere Beherrschung des Gegenstandes

ermöglicht. Es wird die Weierstraß'sche Theorie zu Grunde gelegt, der Zusammenhang mit den Jakobischen Funktionen nur kurz gestreift. Ein Abschnitt ist den Funktionen auf der zweiblättrigen Fläche mit vier Verzweigungspunkten sowie den Integralen I., II. und III. Gattung und dem Umkehrproblem für das Integral I. Gattung gewidmet. Anlässlich der Besprechung der elliptischen Modulfunktion wird die Gelegenheit genommen, den Picard'schen Satz zu beweisen. Auf die Bedeutung der Thetareihen zur numerischen Berechnung wird hingewiesen, doch ist dieser Abschnitt in Hinblick auf den Zweck des Buches etwas knapp geraten. Die Anwendungen nehmen ihren Ausgangspunkt von der durch die $\wp$ -Funktion geleisteten konformen Abbildung (Rechteck, Torus, geschlitzte Kreisfläche auf einen Kreisring usw.) und im Zusammenhang damit werden Potentialströmungen über solchen Gebieten besprochen. Auch der Spezialfall der Schwarz'schen Abbildungsaufgabe (reguläres Tetraeder) findet Berücksichtigung. Natürlich wird die ebene Pendelschwingung behandelt. Da es sichtlich das Bestreben des Verfassers war, an physikalischen Dingen nichts vorauszusetzen, was nicht ohneweiters im Text erklärt werden kann, ist auf weitergehende physikalische Anwendungen (Kreisel) verzichtet worden. Alles in allem eine ausgezeichnete Einführung in den Gegenstand, die man Studierenden der Mathematik und mathematischen Physik warm empfehlen wird.

L. Schmetterer, Wien

Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Theorie der Laplace-Transformation. Von *G. Doetsch*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band 14.) Mit 40 Textabb., 581 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. sfr. 74.—, geb. sfr. 78.—.

Seit dem Erscheinen der Monographie über die Laplace-Transformation von *G. Doetsch* (1937) ist der Stoff, sowohl, was die Theorie als auch die Anwendungen betrifft, um ein Beträchtliches angewachsen und so hat sich der Verfasser der dankenswerten Aufgabe unterzogen, sein Werk nunmehr zu einem „Handbuch“ zu erweitern, dessen erster die Theorie enthaltender Teil nunmehr vorliegt. Dabei wurde die frühere Darstellung nicht nur ergänzt, sondern der ganze Stoff neu durchgearbeitet und auch zum Teil neu angeordnet, so daß ein vollständig neues Werk entstanden ist. Durch Heranziehung des in der früheren Darstellung vermiedenen Integralbegriffes von Lebesgue konnten nunmehr auch wesentliche Teile der Theorie dargestellt werden, die vorher unberücksichtigt bleiben mußten, so z. B. jene, die von Plancherels Theorie der Fourier-Transformation Gebrauch machen. Weiter ist zu erwähnen, daß nunmehr auch die „zweiseitige“ Laplace-Transformation ausführlicher behandelt ist und auch für die Theorie der Laplace-Stieltjes-Integrale die Grundlagen bereitgestellt werden. Hervorgehoben sei ferner die eingehende Behandlung des komplexen Umkehrintegrals, die für die Lösung von Problemen der Praxis alle nötigen funktionentheoretischen Methoden ausführlich darlegt. Auch eigene noch unveröffentlichte Ergebnisse hat der Verfasser zur Darstellung gebracht, so die Darstellung des „unvollständigen“ Laplaceintegrals durch ein komplexes Integral über die Laplace-Transformierte, welche zu einer Darstellung der Partialsummen Dirichlet'scher Reihen führt. Ein eigenes Kapitel ist den Cesàro-Mitteln des Laplace-Integrals gewidmet, durch die in vielen Fällen die analytische Fortsetzung der Laplace-Transformierten gewonnen werden kann, während der letzte vier Kapitel umfassende Teil eine Zusammenfassung der Sätze vom Abel'schen und Tauber'schen Typus gibt. Auch hier sind wesentlich neue Ergebnisse des Verfassers zu finden.

In einem Anhang werden die im Buch verwendeten Sätze der Analysis zusammengestellt, reichliche Literaturhinweise und ein ausführliches Sachregister beschließen das Werk, das in seiner neuen Gestalt sicherlich sowohl für die Forschung wie für die Praxis ein unentbehrlicher Behelf sein wird.

J. Radon, Wien

Die zweidimensionale Laplace-Transformation. Von *D. Voelker* und *G. Doetsch*. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften; Mathematische Reihe: Band 12.) 259 S. Basel: E. Birkhäuser. 1950. Geb. sfr. 43.—.

In dem vorliegenden Band haben es die Verfasser unternommen, Theorie und Anwendung der zweidimensionalen Laplace-Transformation in einer auch für den Praktiker genießbaren Form zusammenfassend darzustellen. Da sich die zweidimensionale Laplace-Transformation durch zweimalige Ausführung der eindimensionalen gewinnen läßt, lassen sich die Hauptzüge der Theorie sehr kurz unter Berufung auf den eindimensionalen Fall darstellen. Das Hauptgewicht ruht daher auf der ausführlichen Darlegung der Anwendung zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen, die in fünf der sieben Kapitel des ersten Teils behandelt wird. Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen, sei die große Mannigfaltigkeit der behandelten Probleme (hauptsächlich Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen 2. Ordnung) hervorgehoben, die es dem Praktiker ermöglichen wird, die meisten einschlägigen Aufgaben nach den hier gegebenen Methoden selbständig zu lösen. Das Schlußkapitel des ersten Teiles behandelt einige weitere, durch die zweidimensionale Laplace-Transformation lösbare Aufgaben, nämlich die Herleitung von Funktionalrelationen für die Besselfunktionen sowie die Summierung von Reihen, für die Bilinearentwicklungen nach Laguerre-Polynomen sowie Besselfunktionen als Beispiele ausgerechnet werden.

Der zweite Teil, den D. Voelker zusammengestellt hat, liefert eine ausführliche in übersichtlicher Tabellenform angeordnete Sammlung von Korrespondenzen, zuerst für Funktionaloperationen, dann für spezielle Funktionen. Das hier gegebene außerordentlich reichhaltige Material wird für die Anwendung der Theorie eine wesentliche Erleichterung bilden.

J. Radon, Wien

Über quasilineare hyperbolische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen. Das Anfangswertproblem, die gemischte Anfangs-Randwertaufgabe, das charakteristische Problem. Von *H. Beckert*. (Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig: Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse: Band 97, Heft 5.) 68 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1950.

Vorliegende Habilitationsschrift behandelt die im Titel genannten Probleme mittels der Differenzenmethode von Lewy in exakter und ausführlicher Weise.

E. Hlawka, Wien

Partieele Differentiaal-Vergelijkingen. Von *H. Bremekamp*. Zweite Auflage. (Noordhoffs Verzameling van Wiskundige Werken: Nr. XX.) VII, 227 S. Groningen und Batavia: P. Noordhoff N. V. 1948. hfl. 6.50, geb. hfl. 7.50.

Dieses Buch, welches aus Vorlesungen an der Hochschule Delft entstanden ist, behandelt die partiellen Differentialgleichungen im üblichen Umfang, also: Grundlagen der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und die klassi-

schen Differentialgleichungen der Physik, die Gleichung der schwingenden Saite, Wärmeleitungsgleichung, Wellengleichung, Potentialtheorie usw. Ausführlich sind die Fourier'schen Reihen, Bessel- und Kugelfunktionen behandelt, natürlich unter den klassischen Konvergenzbedingungen. Hübsch ist die Ableitung des ersten Gliedes der asymptotischen Entwicklung der nullten Bessel-funktion. Komplexe Methoden sind vermieden. Hervorzuheben ist die ausführliche Besprechung der Riemann'schen Integrationsmethode. Im ganzen gesehen ein schönes Buch, welches uns die klassischen Methoden bringt, also nicht so weit geht wie die großen Darstellungen, aber gerade das, was der Studierende braucht. Zu wünschen wäre, daß bei einer nächsten Auflage die grundlegenden Begriffe wie Eigenwerte und Eigenfunktionen aufgenommen werden. Das Buch liest sich sehr leicht. Die Ausstattung ist gut.

E. Hlawka, Wien

An Introduction to the Calculus of Variations. Von *Ch. Fox*. Mit 50 Textabb., VIII, 271 S. Oxford: At the University Press. — London: G. Cumberlege. 1950. Geb. 21 s. net.

Es war nicht die Absicht des Verfassers, eine tiefgehende mathematische Analyse des Gebietes zu geben, sondern einen mathematischen Apparat zu entwickeln, der genügt, um in einwandfreier Form die Anwendungen der Variationsrechnung auf die Physik darzustellen. Weitergehende Sätze werden vielfach nur zitiert — meist mit einem Hinweis auf das einschlägige Lehrbuch von Forsyth. Die mathematischen Ausführungen reichen bis zur Weierstraß'schen E-Funktion nach vorhergehender Besprechung des Hilbert'schen Ideenkreises. Insbesondere muß darauf hingewiesen werden, daß sich der Verfasser auch bei schwierigeren Fragen niemals mit der Behandlung der ersten Variation begnügt, sondern auch stets die zweite Variation heranzieht. Im Abschnitt über isoperimetrische Probleme werden auch nicht holonome Bedingungen in den Kreis der Betrachtungen gezogen. Als Bindeglied zwischen der mathematischen Theorie und den Anwendungen in der mathematischen Physik nimmt naturgemäß das Hamilton'sche Prinzip eine zentrale Stellung ein, welches auch in seiner Anwendung auf die spezielle Relativitätstheorie gewürdigt wird. Im Zusammenhang mit den Hamilton'schen Ideen gibt der Verfasser auch eine hübsche Behandlung der speziellen Zermelo'schen Navigationsaufgabe. Sehr willkommen wird der Abschnitt über die direkten Annäherungsmethoden von Rayleigh-Ritz sein, wobei auch die Konvergenzuntersuchungen von Trefftz berücksichtigt werden, sowie die Methode von Galerkin. Alles in allem ein hübsches Buch, welches mit seinen vielen ausführlich besprochenen Anwendungsbeispielen dem ernststen Studierenden der Mathematik und Physik warm empfohlen werden kann.

L. Schmetterer, Wien

Probability and the Weighing of Evidence. Von *I. J. Good*. VIII, 119 S. London: Ch. Griffin & Company Limited. 1950. Geb. 16 s. net.

In vielen Zügen mit der Theorie Jeffreys übereinstimmend, entwickelt der Verfasser seine Anschauungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche sich insbesondere dadurch auszeichnet, daß er den „objektiven Grad von Glaubwürdigkeit eines Ereignisses“ der Jeffreys'schen Theorie ersetzt durch den Grad von Glaubwürdigkeit, welchen eine Person auf Grund ihres allgemeinen Intelligenzzustandes („general state of mind“) einem „Ereignis“ entgegenbringt. Es ist hier nicht der Platz, sich mit den sicherlich interessanten Ideen des Verfassers

auseinanderzusetzen, deren „außermathematische“ Betrachtungen vor der axiomatischen Einführung der Theorie dargelegt werden, doch ist sich der Referent nicht völlig im Klaren darüber, inwiefern die „Subjektivisierung“ des Wahrscheinlichkeitsbegriffes, der dann doch wieder der axiomatischen Behandlung unterworfen wird, dem Schritt von der mathematischen Theorie zur Anwendung auf die Vorgänge in der Welt eher gerecht wird. Der Verfasser bespricht in der Einleitung kurz und klar wohl alle bedeutenderen Theorien des Wahrscheinlichkeitskalküls und bedient sich bei der Axiomatik seiner Theorie der einfachsten Symbole der Aussagenlogik. Naturgemäß kommt dem Bayes'schen Ideenkreis eine zentrale Stellung zu und von diesem Gesichtspunkt aus werden auch Fishers likelihood und Walds sequential analysis beleuchtet. Der Verfasser zeigt kurz, wie man auf Grund seines Konzeptes zum Begriff der zufälligen Variablen und der Verteilungsfunktion kommt. Überdies zeigt es sich, daß keinerlei formale Unterschiede etwa gegenüber der maßtheoretischen Einführung dieser Begriffe auftreten. Im letzten Abschnitt werden einige Anwendungen auf Fragen der Statistik besprochen (χ^2 -Test, Vertrauens- und Toleranzintervalle). Die vom Verfasser auf Grund seines Standpunktes geübte Kritik scheint sich ausschließlich auf das „Anwendungsproblem“ zu beziehen und hat daher wohl eher philosophischen als mathematischen Charakter. Man muß nicht notwendig mit des Verfassers Ansichten übereinstimmen, wird aber auf jeden Fall mit Interesse die originellen Darlegungen des Autors verfolgen.

L. Schmetterer, Wien

An Introduction to the Theory of Statistics. Von *G. U. Yule* und *M. G. Kendall*. Fünfte, vermehrte und verbesserte Auflage. IX, 701 S. London: Ch. Griffin & Company Limited. 1950.

Wenn einmal ein Werk auf eine solche Auflagenhöhe zurückblicken kann, ist es wohl nicht mehr nötig, es dem interessierten Leser noch besonders zu empfehlen. Das Werk, welches ursprünglich nur den Namen des erstgenannten Verfassers getragen hat, hat es verstanden, sich stets den Fortschritt der Disziplin nutzbar zu machen. Da eine Besprechung in dieser Zeitschrift noch nicht erfolgt ist, soll dies in aller Kürze nachgeholt werden. Es ist nicht Zweck des Buches, von der mathematischen Seite her möglichst tief in die Theorie einzudringen, sondern eine saubere und breite Darstellung der Dinge zu geben, wie sie dem Praktiker in seiner Arbeit willkommen ist. Ungezählte Beispiele müssen auch dem jeder mathematischen Deduktion Fernstehenden das Eindringen in die Materie möglich machen. (Klassifizierung von Merkmalen, Häufigkeitsverteilungen, statistische Maßzahlen, Korrelation-Regression, Großzahl- und Kleinzahlstichproben (t-Verteilung), χ^2 -Verteilung, Varianzanalyse, Zeitreihen). Reiches Tafelmaterial und die Auflösung der im Text eingestreuten zahlreichen Übungsaufgaben beschließen das Buch.

L. Schmetterer, Wien

Contributions to Mathematical Statistics. Von *R. A. Fisher*. New York: J. Wiley & Sons. — London: Chapman & Hall. 1950. \$ 7.50.

Fisher hat 43 seiner bedeutendsten Arbeiten in einem Sammelband vereinigt und jede derselben mit einem kurzen Kommentar eingeleitet. Jeder Statistiker, welcher Arbeitsrichtung er auch immer angehören möge, wird es wärmstens begrüßen, daß die verstreut publizierten und oft schwer zugänglichen Arbeiten eines der Pioniere der modernen Statistik nunmehr in übersichtlicher Form vorliegen. Gleichzeitig trägt dieser Band dazu bei, das grundlegende Werk

Fishers in seinem vollen Umfang zu würdigen, wenn es dessen noch bedürfen sollte. Es ist schade, daß der Verlag angesichts der sonst hervorragenden Ausstattung des Bandes keinen anderen Weg gefunden hat, um dem Verfasser erwünschte Korrekturen zu ermöglichen, wie es z. B. in den Nummern 33.383—33.385 und anderswo geschehen ist. Ein Bild des Gelehrten schmückt den Band. Der von *Mahalanobis* verfaßte Lebenslauf *Fishers* (Abdruck aus *Sankhya* 4, 1938) leitet das Werk des Verfassers ein.

L. Schmetterer, Wien

Vierstellige Tafeln für logarithmisches und numerisches Rechnen. Von H. Gravius. Ausgabe A mit Sechsteilung des Grades. Dritte Auflage. 32 S. — Ausgabe B mit Zehnteilung des Grades. Zweite Auflage. 40 S. Bonn: F. Dümmler. 1947.

Beide Hefte enthalten zunächst leicht verständliche Anleitungen zum Gebrauch der nachfolgenden Tafeln. Diese bringen: 1. 4-stellige Logarithmen der Zahlen 1—4500, 2. Logarithmen der trigonometrischen Funktionen, 3. wichtige Konstanten, 4. natürliche Werte der trigonometrischen Funktionen, 5. Quadrate der Zahlen 1,00 bis 10,00, 6. Reziproke der Zahlen 1,00 bis 10,00, 7. Vielfache der Zahlen 1 bis 100, 8. eine graphische Interpolationstafel.

Die Zahlen in den Tafeln sind geschickt angeordnet; beide Hefte sind handlich und der Druck ist sehr klar.

N. Hofreiter, Wien

Sphärische Trigonometrie. Von P. Crantz und M. Hauptmann. Vierte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe II, Band 7.) Mit 67 Textabb. und 1 Nomogramm, 112 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1950. \$ 1.—.

Die vierte Auflage zeigt gegenüber den früheren Auflagen keine wesentlichen Änderungen. Wie der Bearbeiter, M. Hauptmann, im Vorwort erwähnt, wurden gelegentlich Voraussetzungen und Geltungsbereiche schärfer gefaßt, der Funktionsbegriff stärker betont und die Anschauung noch mehr herangezogen.

Der behandelte Stoff ist in 8 Kapitel gegliedert. Die Anfangskapitel befassen sich mit den wichtigsten Eigenschaften der Kugel und dem Kugeldreieck. Das wichtigste Kapitel ist wohl das 4., das eine ausführliche Behandlung des allgemeinen Kugeldreieckes mit Hilfe der Rechnung, der Zeichnung und des Nomogramms gibt. Dem rechtwinkligen Kugeldreieck ist das folgende Kapitel gewidmet. Zahlreich sind die Beispiele als Anwendung auf Erd- und Himmelskunde. Im 6. Kapitel werden die Halbwinkelsätze und die Formeln von Gauß, Mollweide und Neper abgeleitet. Das 7. Kapitel erörtert die scheinbare Sonnenbahn, die wahre und mittlere Sonnenzeit und die Weltzeit (mit Angaben des Berliner Jahrbuches für 1949). Im letzten Kapitel werden die 5 regelmäßigen Körper besprochen; die letzten zwei Beispiele zeigen eine Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Mechanik.

Die 114 ausführlich gelösten Aufgaben, die vielen pädagogischen Hinweise und die 67 mustergültigen Figuren, die das Wesentliche kräftig hervorheben, machen das Bändchen besonders empfehlenswert. Die elementare und klare Darstellung ermöglicht es auch dem interessierten Realschüler der 7. oder 8. Klasse, sich ohne Schwierigkeiten in dem Büchlein zurechtzufinden.

J. Laub, Wien

Leerboek der nieuwere meetkunde van het vlak en van de ruimte. Von F. Schuh. Mit 222 Textabb., XVI, 506 S. Groningen und Batavia: P. Noordhoff N. V. 1938. hfl. 10.50.

Das Buch ist in erster Linie für Studierende geschrieben. Die Darstellung ist sehr ausführlich und leicht verständlich. Besonders wertvoll für den Studierenden sind die nahezu 2000 Übungsaufgaben. Wer das Buch durcharbeitet, hat sich mit den Elementen der Geometrie wirklich gründlich vertraut gemacht. Das Buch enthält die Elemente der projektiven Geometrie in konstruktiver und analytischer Behandlung. Ausführlich werden ferner: Koordinatenbegriffe, Transformationen und Kreisgeometrie betrieben.

N. Hofreiter, Wien

Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung. Von *V. Hlavaty*. Ins Deutsche übersetzt von M. Pinl. VII, 569 S. Groningen und Batavia: P. Noordhoff. 1939.

Da das Erscheinen des vorliegenden Werkes nun schon zwölf Jahre zurückliegt, mag eine kurze Charakterisierung genügen. Das Buch gibt eine sehr sorgfältige und in allen Einzelheiten wohlgedachte Einführung in den vielbehandelten Problemkreis der klassischen Differentialgeometrie, die in den Normierungsfragen teilweise von der gewohnten Darstellungsweise abweicht; so wird z. B. in der Kurventheorie das begleitende Dreibein stets so orientiert, daß auch die zweite Krümmung nicht negativ wird. Die Tensorrechnung wird schrittweise den Bedürfnissen der Flächentheorie entsprechend entwickelt. Besonders hervorgehoben sei der 7. Abschnitt des 2. Kapitels, das eine sorgfältige Behandlung des Abwicklungsproblems enthält, sowie der 4. Abschnitt des 3. Kapitels „Flächenkonstruktionen“ wo u. a. der Existenzbeweis für Flächen mit gegebenen Grundformen, sowie das Problem, Flächen mit gegebener erster Grundform herzustellen, eine saubere Darstellung finden. Das letzte Kapitel behandelt die wichtigsten Sonderfälle: Geradlinige Flächen, W-Flächen, Minimalflächen, Drehflächen konstanter Krümmung und die Flächen von Monge.

Der Studierende wird, wenn er das Buch durchgearbeitet hat, eine gründliche Kenntnis der auf der Tensorrechnung aufgebauten Differentialgeometrie besitzen, doch wird ihm durch das Fehlen jeglicher Literaturnachweise sowie geschichtlicher Bemerkungen die Einordnung des gewonnenen Tatsachenmaterials in einen weiteren Gesichtskreis erschwert, wenn nicht unmöglich gemacht.

J. Radon, Wien

Introduction to Algebraic Geometry. Von *W. G. Welchmann*. Mit 37 Textabb., X, 351 S. Cambridge: At the University Press. 1950. Geb. 25 s. net.

Der Titel des Buches könnte auch „Vorbereitung für die algebraische Geometrie“ heißen, denn um eine solche handelt es sich hier. Es werden nämlich hauptsächlich die Kegelschnitte und mit ihnen zusammenhängende Gebilde untersucht, während algebraische Kurven höherer Ordnung fast nicht behandelt werden. Es liegt aber hier keineswegs ein gewöhnliches Lehrbuch der projektiven oder analytischen Geometrie vor, sondern es werden überall Bezeichnungen und Methoden so gewählt, daß ein weiteres Studium schwierigerer Dinge daran anknüpfen kann. Besonders ist hervorzuheben, mit welcher großer Sorgfalt in den ersten drei Kapiteln die grundlegenden Definitionen und Begriffe diskutiert werden. In der dann folgenden Fülle von Untersuchungen über die verschiedensten geometrischen Gebilde kommen immer wieder Methoden der algebraischen Geometrie systematisch zur Verwendung. Mit diesem Ziel vor Augen hat der Verfasser ein ausgezeichnetes Werk geschaffen, welches dem Studierenden das

Eindringen in die algebraische Geometrie sicher wesentlich erleichtern wird. Vielleicht wird das Buch auch dem Mittelschullehrer von Nutzen sein und ihm manche Anregung bieten.

K. Prachar, Wien

Die Quadratur des Kreises. Von E. Beutel. Fünfte Auflage. (Mathematisch-physikalische Bibliothek: Reihe I, Band 12.) 63 S. Leipzig: B. G. Teubner. 1951. \$ 0,48.

Das Heft berichtet in sehr interessanter, jedermann verständlichen Art, von dem Jahrtausende langen Bemühen um das berühmte Problem der Quadratur des Kreises. Es beginnt mit den Untersuchungen der alten Ägypter, Chinesen, Inder, Babylonier. Dann erfahren wir die Beiträge der Griechen, insbesondere des Archimedes, zu dem Problem. Es folgen Arbeiten der Araber und der Abendländer wie Cusanus, Leonardo da Vinci, Vieta, Snellius, Huygens, Leibniz und Newton. Erst im 19. Jahrhundert gelang der Nachweis der Irrationalität und schließlich der Transzendenz von π . Erst die Hilfsmittel der modernen Mathematik, insbesondere der Algebra haben die endgültige Lösung ermöglicht, allerdings anders als man ursprünglich glaubte. Die Schrift möge jeder lesen, der sich für das Problem interessiert. Die 5. Auflage unterscheidet sich von der letzten durch Aufnahme von ein paar weiteren Näherungskonstruktionen.

N. Hofreiter, Wien

Lehrbuch der theoretischen Physik. Von W. Weizel. Zweiter Band: Struktur der Materie. Mit 194 Textabb., XII, S. 773—1540. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 66.—, geb. DM 69.90.

Dieses Buch gliedert sich in sieben Abschnitte: 1. Elementare Atomtheorie, 2. Quantentheorie, 3. Moleküle. Chemische Bindung, 4. Statistik, 5. Struktur und Eigenschaften der Gase, 6. Struktur und Eigenschaften der zusammenhängenden Materie, 7. Kernphysik, Elementarteilchen.

Der erste Abschnitt behandelt die Erfahrungstatsachen bei der Atomhülle. Bei der theoretischen Deutung wird die Schrödingergleichung herangezogen, welche in diesem Abschnitt einfach postuliert wird, während die systematische Theorie dem zweiten Abschnitt vorbehalten ist, welche auch die Dirac'sche Theorie, die zweite Quantelung und die Quanteltheorie der Wellenfelder bis zur Theorie der Mesonenfelder umfaßt. Es ist wohl zum ersten Mal, daß ein allgemeines Lehrbuch der theoretischen Physik, so viel ich weiß, so weit geht. Selbstverständlich kann es nicht so gründlich wie ein Spezialwerk über diesen Gegenstand sein. Die Darstellung kann als recht glücklich angesehen werden und gewährt vor allem dem experimentell tätigen Physiker einen guten Einblick in die Theorie, ohne ihn mit einem komplizierten mathematischen Apparat zu belasten. Allerdings wäre an manchen Stellen eine größere Präzision erwünscht, z. B. werden die Ausführungen in H I einem Anfänger wohl dunkel vorkommen. Doch sind dies nur Kleinigkeiten. Beim dritten Abschnitt ist die ausführliche Behandlung der Moleküle und ihrer Spektren hervorzuheben. Im fünften Abschnitt hätte meiner Meinung nach die Boltzmann'sche Fundamentalgleichung aufgenommen werden sollen. Der Abschnitt enthält weiter sehr weitgehende Ausführungen über Elektronenoptik und elektrische Entladungen in Gasen. Der nächste Abschnitt dringt sehr tief in die Theorie der Gitter ein, während die Flüssigkeiten kurz behandelt sind. Der letzte Abschnitt über Kernphysik ist meines Erachtens hervorragend. Auf wenigen Seiten werden die theoretischen Ansätze besprochen und geben so eine gute Einführung in diesen aktuellen Problemkreis. Man sieht aus dieser kurzen, sehr unvollständigen Übersicht,

welche umfangreiche Materie hier dargestellt wird. Um dies durchführen zu können, mußte der Verf. oft eigene Wege einschlagen. Dabei werden die experimentellen Grundlagen nie aus den Augen verloren und die technischen Anwendungen gebührend berücksichtigt. Die theoretischen Entwicklungen sind möglichst einfach gehalten und nirgends überwuchern die formalen Entwicklungen. Es liegt hier ein Lehrbuch vor, welches bis an die aktuelle Forschung heranführt und jedem Physiker, Chemiker und Techniker empfohlen werden kann. Die Ausstattung des Buches ist, wie immer in diesem Verlag, hervorragend.

E. Hlawka, Wien

Der Kresisel. Seine Theorie und seine Anwendungen. Von *R. Grammel*. Zweite, neubearbeitete Auflage. Zweiter Band: Die Anwendungen des Kreisels. Mit 133 Textabb., VI, 268 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1950. DM 30.—, geb. DM 33.—.

Der Verfasser hat nun den zweiten Band der Neubearbeitung seines bekannten Buches (vgl. *Mh. Math.* **55**, 103, 1951) folgen lassen, der die Anwendungen der Kresiseltheorie bringt. Die Einteilung in drei Abschnitte ist aus der ersten Auflage beibehalten, allerdings ist jetzt der Titel des zweiten Abschnittes in „Kresiselgeräte“ abgeändert. Auch dieser Band zeigt wieder das große didaktische Geschick des Verfassers, der nicht seine Aufgabe darin sieht, eine ermüdende Anzahl von Kresiselgeräten und ihrer Konstruktion vorzuführen, sondern dem es darum zu tun ist, das Grundsätzliche hervorzuheben. Dadurch ist das Buch nicht nur für den Ingenieur, sondern auch für den Mathematiker von hohem Interesse. Der Referent erinnert sich noch an das Vergnügen, welches ihm das Studium der ersten Auflage bereitet hat. Die Auflage ist auf den neuesten Stand gebracht, enthält vieles, was nicht leicht zugänglich ist, und enthält selbstverständlich viele originelle Beiträge des Verfassers.

Es ist das moderne Lehrbuch des Kreisels. Die Ausstattung ist wie immer bei diesem Verlag vortrefflich.

E. Hlawka, Wien

Exercices de mécanique. Von *H. Beghin* und *G. Julia*. Zweite Auflage. Band I, Heft I. VII, 336 S. Paris: Gauthier-Villars. 1946.

Das vorliegende Heft behandelt in sechs Kapiteln Vektorrechnung, Kinetik der Punkte und starrer Körper, Schwerpunkt und Trägheitsmomente, lebendige Kraft, Bewegungsgröße und Trägheitskräfte, während der Kraftbegriff im eigentlichen Sinn dem folgenden Heft vorbehalten ist. Jedem Kapitel geht eine kurze theoretische Einführung voraus. Die Aufgaben sind mit ausführlichen Lösungen versehen und nach aufsteigendem Schwierigkeitsgrad geordnet. Die Autoren haben großes Gewicht darauf gelegt, die Aufgaben so konkret als möglich zu stellen und jeweils die geeignetste Lösungsmethode zu geben. So wird das reichhaltige Buch sich gewiß unter Lehrenden und Lernenden zahlreiche Freunde erwerben.

J. Radon, Wien

Problèmes de Propagations guidées des Ondes électromagnétiques. Von *L. de Broglie*. Zweite Auflage. VI, 118 S. Paris: Gauthier-Villars. 1951.

Das Buch (dessen zweite Auflage sich nur durch Ergänzungen im Literaturverzeichnis von der ersten unterscheidet) behandelt die elektromagnetischen Wellen in metallisch begrenzten Hohlräumen. Zahlreiche besondere Formen

solcher Hohlräume, für die sich die Probleme mit den bekannten Funktionen lösen lassen, werden im einzelnen untersucht. Ein interessantes Kapitel ist der Berechnung der Verluste gewidmet, die infolge der endlichen Leitfähigkeit z. B. in langen zylindrischen Räumen (guides) auftreten. Besonders erwähnt sei noch das letzte Kapitel, in dem die Beugung an der Mündung von Rohren behandelt wird. Hier findet sich auch das Huygen'sche Prinzip in der Form von Kottler, das bei Beugungsproblemen eine große Rolle spielt.

Dieses schöne Buch sollte jeder lesen, der sich mit der Theorie der elektromagnetischen Wellen beschäftigt.

K. Prachar, Wien

Regeltechnik. Von *K. Seidl*. IV, 69 S. Wien: F. Deuticke. 1950. S 25.—.

Mit diesem Büchlein wird der Versuch gemacht, die allgemeine Wirkungsweise von — vor allem elektrischen — Regelanordnungen systematisch darzustellen. Es ist für den Praktiker der Technik bestimmt, dem eine solche Darstellung sicher sehr willkommen sein wird. Dem mehr mathematisch interessierten Leser wird weniger geboten — wie dies ja in der Natur der Sache liegt.

K. Prachar, Wien

Elektromaschinen. Lehrbuch für Fachschulen, Technische Hochschulen und Universitäten. Von *K. Seidl*. Band I. Mit 96 Textabb. und 9 Tab., XII, 180 S. Wien: F. Deuticke. 1951. S 80.—.

Der eben erschienene I. Band behandelt die physikalischen und technischen Grundlagen der Elektrotechnik und sodann ausführlich die Theorie des Transformators und der Asynchronmaschinen. Die Darstellung zeichnet sich durch übersichtliche Gliederung des Stoffes und der in der Praxis wichtigen Formeln, sowie durch instruktive Zeichnungen aus. Die meist knappe und oft nur referierende Formulierung gibt dem Buch mehr den Charakter von Prüfungsskripten als den eines tiefgreifenden Lehrbuches. Als Nachschlagebuch wäre das Werk gut geeignet, wenn ein ausführlicher Literaturnachweis sowie ein alphabetisches Stichwörterverzeichnis beigelegt werden würde; dies könnte leicht im II. Band nachgetragen werden. Der Hinweis auf gewisse mathematische Analogien zwischen Elektrotechnik und Mechanik ist an sich begrüßenswert. Er darf jedoch nicht so weit führen, daß formell jede Proportionalität als "Ohmsches Gesetz" und jeder Proportionalitätsfaktor als „elektrischer Widerstand" bezeichnet wird. Offenbar dem Wunsche entsprechend besonders originell zu sein, sind leider viele alt eingeführte Bezeichnungen abgeändert worden, was auch Anlaß zu Mißverständnissen geben kann.

R. Herzog, Wien

Calculating Instruments and Machines. Von *D. R. Hartree*. Mit 68 Textabb., IX, 138 S. Cambridge: At the University Press. 1950. Geb. 21 s. net.

Die Bücher, die sich mit den neuesten Fortschritten im Bau mathematischer Instrumente beschäftigen, sind nicht gerade zahlreich. Um so mehr ist es daher zu begrüßen, daß eine solche Darstellung von einem berufenen Fachmann erfolgt ist. Das Werk gliedert sich in zwei Teile. Der erste bringt die vom Autor so benannten „Instrumente", in der Hauptsache Instrumente zur Auflösung von linearen Gleichungssystemen, Gleichungen höheren Grades, gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen usf. Der zweite Teil behandelt die elektri-

schen Rechenmaschinen von den Anfängen ihrer Entwicklung bis zu den neuesten Formen. Es lag in der Absicht des Verfassers, nur den prinzipiellen Aufbau der Apparate zu beschreiben und die Hauptideen herauszuarbeiten ohne den Leser mit Details zu belasten. Viele Leser würden es jedoch sicherlich begrüßen, wenn manche Dinge etwas genauer behandelt wären. Auf alle Fälle hat der Verfasser durch sein sehr interessantes Werk ein lebendiges Bild von den Möglichkeiten vermittelt, die sich auf diesem aktuellen Zweig der Technik bieten.

K. Prachar, Wien

Soeben erschien der dritte (Schluß-) Teil von

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers

In drei Teilen

Von

Prof. Dr. K. Federhofer, Graz

- I. Teil: **Statik.** 165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabbildungen. VI, 130 Seiten. 1950. S 34.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—
- II. Teil: **Kinematik und Kinetik des Punktes.** 113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabbildungen. IV, 103 Seiten. 1951. S 42.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—
- III. Teil: **Kinematik und Kinetik starrer Systeme.** 149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 191 Textabbildungen. V, 139 Seiten. 1951. S 42.—, DM 9.60, \$ 2.30, sfr. 10.—

„... Es ist erfreulich, daß hier eine ausgezeichnete Aufgabensammlung vorliegt, die eine Fülle von leichten und schwierigeren Aufgaben aus der analytischen und graphischen Statik enthält. Neben den Aufgaben werden stets die Lösungen angegeben. Die leicht verständlichen Erläuterungen bieten dem Studenten wertvolle Hilfe.“

Monatshefte für Mathematik

Soeben erschien:

Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre

Eine Einführung des rationalisierten Giorgischen Maßsystems

Von

Dipl.-Ing. P. Cornelius, Eindhoven, Niederlande

Mit 11 Textabbildungen. VIII, 89 Seiten. 1951. S 48.—, DM 10.—, \$ 2.40, sfr. 10.40

Das von Giorgi vorgeschlagene und 1935 von der International Electrical Commission angenommene MKS-System stellt in seiner rationalisierten Form einen gewissen Abschluß der Bemühungen dar, ein elektrisches Maßsystem zu schaffen, das ein Maximum an Vorteilen in sich vereinigt. Das vorliegende Buch geht ausführlich auf die Grundfragen der Elektrizitätslehre ein und führt den Leser in leichtfaßlicher Form in die Gedankengänge des Giorgischen Systems ein.

Soeben erschien:

Grundfragen der Ökonometrie

Von

Prof. Dr. W. Winkler, Wien

Mit 39 Textabb. XII, 220 Seiten. 1951. Steif broch. S 87.—, DM 18.60, \$ 4.50, sfr. 19.60

Ökonometrie ist ein neuer Wissenschaftszweig, der sich die Aufgabe stellt, das wirtschaftstheoretische Denken und die statistische Tatsachenwelt der Wirtschaft in bestmöglichen Einklang zu bringen. Was nützt zum Beispiel die allgemeine Erkenntnis der Abnahme des Grenznutzens des Geldes mit zunehmendem Einkommen dem Finanzminister, der eine gerechte Einkommensteuerprogression vornehmen will, wenn Art und Ausmaß der Abnahme des Grenznutzens nicht genau bestimmt worden sind? Ein Werk, das solche, für die praktische Wirtschaftspolitik eminent bedeutsame Probleme behandelt, hat bisher in der deutschen Literatur gefehlt

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

